

Специальный курс  
**Комплексная теория дифференциальных уравнений**

*Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.*

Цель спецкурса — дать введение в замечательную область математики — комплексную теорию дифференциальных уравнений, т.е. теорию дифференциальных уравнений на комплексных многообразиях (основы этой теории были заложены в работах Жана Лере).

Опишем основные черты данной теории.

Во-первых, простые примеры показывают, что решения дифференциальных уравнений в комплексной ситуации являются, как правило, ветвящимися функциями и, следовательно, имеют особенности в окрестности точек ветвления.

Во-вторых, как известно, при исследовании вещественной теории дифференциальных уравнений в качестве основного аппарата используется аппарат, связанный с преобразованием Фурье.

К сожалению, в комплексной теории классическое преобразование Фурье не работает и пришлось построить некоторое принципиально новое преобразование, которое позволило эффективно решать не только задачи комплексной теории, но также и решить ряд классических задач “вещественной” теории, например, проблему Пуанкаре о “заметании заряда”, проблему о продолжении решений, проблему оптимального синтеза антенн, исследование вычислительных алгоритмов электродинамики, задачи геофизики и др.

В рамках данного спецкурса мы познакомим слушателей, во-первых, с комплексной теорией дифференциальных уравнений, а также с рядом классических разделов комплексного анализа и топологии, многомерной теорией вычетов, теорией ветвящихся интегралов, теорией Пикара-Лефшеца и др.

Спецкурс рассчитан на студентов 3 — 5 курсов.

Программа

- 1. Многомерные вычеты (вычеты Лере).** Определение. Способы вычисления. Интегралы и вычеты. Точные последовательности Лере.
- 2. Ветвящиеся интегралы.** Почему интегралы ветвятся? Примеры. Ветвящиеся циклы. Многообразие Ландау (видимый контур). Интегралы по относительным циклам.
- 3. Асимптотики ветвящихся интегралов.** Теория Пикара–Лефшеца (ветвление циклов вокруг многообразия Ландау). Теорема Лере об асимптотике ветвящихся интегралов.
- 4. Основное интегральное преобразование.** Определение преобразования. Ветвящиеся классы гомологий. Примеры.
- 5. Свойства преобразования.** Преобразование в функциональных пространствах. Обратное преобразование. Коммутационные соотношения. Описание множества особенностей.
- 6. Задача Коши для уравнений с постоянными коэффициентами.** Постановка задачи. Решение задачи Коши. Примеры.
- 7. Особенности решения задачи Коши.** Описание особенностей. Особенности в случае, когда начальное многообразие стратифицировано.
- 8. Задача Коши для уравнений с переменными коэффициентами.** Униформизация Лере. Теорема об униформизации. Распространение особенностей. Асимптотика Лере.
- 9. Приложения теории. Задача о заметании заряда.** Постановка задачи. Решение задачи. Примеры.
- 10. Приложения теории. Задача о материнском теле.** Постановка задачи. Функция Шварца. Алгоритм построения материнского тела.