

Особенности геодезических потоков в сингулярных метриках

А.О. Ремизов

28 октября 2015 г.

Основная цель этого курса (ориентировочно 5 лекций) – познакомить слушателей с одним приложением теории особенностей и дифференциальных уравнений к геометрии: исследованию особенностей геодезических потоков в сингулярных метриках.

Под сингулярными метриками мы подразумеваем метрики (квадратичные формы на касательном расслоении многообразия) двух типов. Во-первых, это метрики, коэффициенты которых гладко зависят от точки многообразия, но на некотором подмногообразии коразмерности 1 дискриминант обращается в нуль и сигнатура метрики меняется. Такие метрики мы называем псевдоримановыми. Примером является метрика, индуцированная на гладкой поверхности (например, на сфере), вложенной в трехмерное псевдоевклидово пространство с сигнатурой $(+ + -)$. Во-вторых, это метрики, коэффициенты которых содержат обращающийся в нуль знаменатель (примеры – метрика Грушина, а также метрика Клейна, с помощью которой строится одна из моделей плоскости Лобачевского). Метрики типа Грушина естественно возникают в ряде задач, например, в геометрической теории управления («почти риманова структура»).

Точки, где псевдориманова метрика вырождается или метрика второго типа имеет разрыв, являются особыми для уравнения геодезического потока. В этих точках всегда имеет место резонанс, чему есть довольно простое и красивое объяснение. Исследование этих особенностей и составляет основное содержание курса. Кроме того, оно позволяет получить интересные следствия о конфигурации геодезических, проходящих через точки вырождения или разрыва. В частности, геодезические проходят через них не в произвольных, а лишь в определенных «допустимых» направлениях. Мы будем рассматривать главным образом двумерный случай, когда точки вырождения (или разрыва) образуют кривую на поверхности. В случае общего положения число допустимых направлений почти во всех точках этой кривой равно 1 или 3, а в отдельных изолированных точках кривой равно 2.

Для осуществления этой программы нам понадобятся некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений. Мы начнем с краткого изложения некоторых фактов локальной теории особых точек векторных полей. Будут рассказаны (без доказательств) основные теоремы об аналитической, гладкой, топологической классификации ростков векторных полей в особых точках вещественного фазового пространства. Мы начнем изложение с результатов для векторных полей общего положения, особые точки которых изолированы, а затем перейдем к векторным полям специального типа, особые точки которых не изолированы, а образуют подмногообразие коразмерности 2 в фазовом пространстве. Такие поля возникают естественным образом во многих задачах, в частности, при исследовании особых точек систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных.

Список литературы

- [1] *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [2] *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамические системы, Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985.
- [3] *Roussarie R.* Modèles locaux de champs et de formes. *Asterisque* (1975), vol. 30, p. 1–181
- [4] *Kossowski M., Kriele M.* Smooth and discontinuous signature type change in general relativity. *Class. Quantum Grav.* 10 (1993), 2363–2371.
- [5] *Ghezzi R., Remizov A. O.* On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 18:1 (2012), pp. 135–158.
- [6] *Ремизов А. О.* Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений. *СМФН*, том 19 (2006), с. 131–170.
- [7] *Ремизов А. О.* Геодезические на двумерных поверхностях с псевдоримановой метрикой: особенности смены сигнатуры. *Матем. сб.*, 200:3 (2009), с. 75–94.
- [8] *Remizov A. O.* On the local and global properties of geodesics in pseudo-Riemannian metrics. *Differential Geometry and its Applications*, 39 (2015), 36–58.
- [9] *Remizov A. O., Tari F.* Singularities of the geodesic flow on surfaces with pseudo-Riemannian metrics. [ArXiv:1505.06671](https://arxiv.org/abs/1505.06671).