Учебный план по программе:

Квантовая теория поля, Теория Струн и математическая физика

Дисциплина 3: Классические интегрируемые системы

Форма контроля: диффзачет
Часов лекций в неделю: 2
Часов семинаров в неделю: 2
Часов на лабораторные работы (если применимо): 0
Часов на самостоятельную работу в неделю: 3

Цель дисциплины: изучение методов исследования и решения нелинейных уравнений математической физики. В основе современного подхода к интегрируемости лежит представление исследуемого уравнения в виде условия совместности вспомогательных линейных задач. В такой ситуации применима разнообразная вычислительная техника, позволяющая эффективно решать некоторые типы начально-краевых задач, находить семейства точных решений и исследовать алгебраические структуры, связанные с уравнением.

Задачи дисциплины: знакомство, на нескольких конкретных примерах, с методами построения точных решений (многосолитонных, конечнозонных, автомодельных) интегрируемых уравнений. Исследование иерархии высших симметрий и законов сохранения, приложения этих понятий в задаче тестирования на интегрируемость. Техника преобразований Дарбу-Бэклунда.

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

— основные понятия теории интегрируемых систем, такие как законы сохранения, высшие симметрии, представления нулевой кривизны, многосолитонные решения, преобразования Бэклунда, основы метода обратной задачи рассеяния;

— наиболее важные конкретные примеры интегрируемых уравнений, включая уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, цепочки Тоды и Вольтерра;

уметь:

— тестировать интегрируемость заданного уравнения;

— исследовать конкретные интегрируемые модели;

владеть:

— методами построения точных решений нелинейных уравнений;

— методами вычисления законов сохранения, высших и классических симметрий.

Темы занятий

1. Нелинейные волны и солитоны

2. Законы сохранения и преобразование Миуры

3. Представление Лакса и высшие потоки КдФ

4. Представление нулевой кривизны, примеры интегрируемых уравнений

5. Коммутативность алгебры Ли высших симметрий

6. Лагранжева и гамильтонова структуры

7. Многосолитонные и конечнозонные решения

8. Уравнения Дубровина и интегрируемость по Лиувиллю

9. Метод обратной задачи рассеяния

10. Классические симметрии и автомодельные решения

11. Линеаризуемые и явно решаемые уравнения

12. Преобразования Дарбу-Бэклунда, метод факторизации

13. Обзор задач в теории интегрируемых систем

Перечень контрольных вопросов:

1. Решения КдФ в виде бегущей волны
2. Дисперсия и диссипация
3. Взаимодействие солитонов. Фазовый сдвиг
4. Оператор полной производной
5. Вариационная производная (оператор Эйлера)
6. Интегрирование по частям
7. Эволюционное дифференцирование
8. Оператор линеаризации
9. Точечные и контактные преобразования
10. Дифференциальные инварианты

11. Автомодельные решения
12. Преобразование Миуры
13. Представление нулевой кривизны
14. Представление Лакса
15. Уравнение КдФ
16. Нелинейное уравнение Шрёдингера
17. Цепочка Тоды
18. Цепочка Вольтерра
19. Уравнение Бюргерса и подстановка Коула–Хопфа
20. Уравнение Лиувилля, уравнения интегрируемые по Дарбу
21. Вычисление высших симметрий (КдФ или НШ)
22. Оператор рекурсии (на примере КдФ или НШ)
23. Коммутативность высших симметрий
24. Решения Йоста для оператора Шрёдингера
25. Спектральные данные и эволюция по времени
26. Восстановление потенциала по спектральным данным
27. N-солитонное решение (метод обрыва производящей функции)
28. N-солитонное решение (метод обратной задачи рассеяния)
29. N-солитонное решение (метод преобразований Дарбу)
30. Преобразование Дарбу-Бэклунда
31. Одевающая цепочка
32. Коммутативность преобразований Дарбу, совместность вокруг куба
33. Метод факторизации в квантовой механике

Примеры контрольных заданий (все задачи на примерах уравнений КдФ, Буссинеска, НУШ, Бюргерса, Лиувилля, sin-Гордона, цепочки Тоды и Вольтерра):

1. Построение решения в виде бегущей волны для заданного уравнения
2. Осуществление в уравнении заданного точечного или контактного преобразования, или дифференциальной подстановки
3. Построение автомодельного решения, относительно заданной группы преобразований
4. Проверка заданного представления нулевой кривизны
5. Непосредственное вычисление высшей симметрии для заданного уравнения
6. Непосредственное вычисление закона сохранения для заданного уравнения
7. Вычисление симметрий с помощью представления нулевой кривизны
8. Вычисление симметрий с помощью оператора рекурсии или мастер-

симметрии
9. Построение преобразования Дарбу для заданной спектральной задачи

Основная литература

[1] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.

[2] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

[3] А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.

[4] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

Дополнительная литература

[5] C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[6] Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.) Солитоны. М.: Мир, 1983.

[7] А.Т. Филиппов. Многоликий солитон. М.: Наука, 1990.

[8] Дж.Б. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

[9] Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978.

[10] Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[11] S. Wolfram. The Mathematica Book, 5th ed., Wolfram Media, 2003.

[12] R.H. Enns, G.C. McGuire. Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers. Birkhauser, Boston, 2001.