

Линейные алгебраические группы.

В этом курсе планируется систематически изучить линейные алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями произвольной характеристики. Неформально можно сказать, что в случае поля \mathbb{C} полупростые (редуктивные) группы Ли и полупростые (редуктивные) алгебраические группы — это одно и то же понятие. Однако для произвольного поля понятие группы Ли не определено.

Один из основных инструментов изучения группы Ли — это её алгебра Ли. Например, известно, что подгруппа Ли связной группы Ли — нормальна тогда и только тогда, когда соответствующая её алгебра Ли является идеалом. В случае характеристики p это не верно. Так же в случае характеристики p отсутствует экспоненциальное отображение, играющее важную роль в изучении групп Ли.

Другой пример — это классификация редуктивных (полупростых) алгебраических групп. Интересно, что эта классификация не зависит от характеристики поля, в то время как в случае характеристики p классификация алгебр Ли существенно отличается от случая характеристики 0.

Основной инструмент изучения линейных алгебраических групп — это алгебраическая геометрия. Примечательно, что после изучения алгебраических групп оказывается, что была изучена существенная часть теории групп Ли без использования анализа.

Курс рассчитан на студентов 2-4 курсов.

Прerequisites: базовая алгебраическая геометрия.

1. Напоминание из алгебраической геометрии: алгебраические многообразия, размерность, морфизмы, касательные пространства.
2. Линейные алгебраические группы: определения, примеры, действия на алгебраических многообразиях. Линейная алгебраическая группа — замкнутая подгруппа $GL(V)$.
3. Алгебра Ли алгебраической группы. Дифференциал морфизма алгебраических групп. Соответствие между подгруппами групп Ли и подалгебрами алгебры Ли.
4. * Случай характеристики 0. Связь между группами Ли и алгебраическими группами. Проблема классификации полупростых алгебраических групп.
5. Разложение Жордана в алгебраических группах.
6. Коммутативные алгебраические группы. Торы.
7. Структура алгебраического многообразия на факторе G/H .
8. Разрешимые и нильпотентные группы. Теорема Ли-Колчина.
9. Борелевские подгруппы. Теорема о сопряженности борелевских подгрупп и максимальных торов.

10. Редуктивные группы. Группа Вейля, системы корней. Разложение Брюа.
11. * Классификация редуктивных (полупростых) алгебраических групп.

Список литературы

- [1] Хамфри Дж. *Линейные алгебраические группы*. Москва, Наука, 1980
- [2] Винберг Э.Б., Онищук А.Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*. Москва, Наука, 1988
- [3] Т.А. Springer *Linear algebraic groups*. Boston, Birkhäuser, 1998