ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ С АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Курс в исполнении А.Б. Скопенкова

К задачам о гомотопической классификации отображений сводятся многие проблемы топологии (в т.ч., возникшие в приложениях). На спецкурсе будут изучаться и применяться основные методы теории гомотопий. Мы начнем с базовых методов, а закончим недавними алгоритмическими результатами.

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения достаточно уметь классифицировать с точностью до гомотопии непрерывные отображения из окружности в себя (см., например, [S20, §3]; нужно именно классифицировать, а не выводить классификацию из теорем, доказательства которых Вы не знаете). Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие будет рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

Курс разбит на два модуля, за каждый из которых можно получить половину кредита, а второй из которых рассчитан на тех, кто сдал первый. Экзамен за каждый модуль состоит из решения задач в течение семестра и письменной работы.

Примерная программа (несколько первых или несколько последних пунктов будут пропущены в зависимости от возможности и желания участников курса).

1. Зачем нужна гомотопическая классификация: результаты о векторных полях, вложениях гиперграфов и погружениях многообразий (выворачиваемость сферы наизнанку). [S20, §9, 15], [S06, §5]

2. Отображения графа в окружность и в проективную плоскость. [S, §7.1, 7.2]

3. Нечетные (Z_2-эквивариантные) отображения графа. [S, §7.3]

4. Общее положение. Отображения n-мерного гиперграфа в $(n+1)$-мерную сферу. [S20, §8.1]

5. Отображения сферы и гиперграфа в окружность. [S, §7.4]

6. Степень отображения. Отображения сферы в себя. [S20, §8.2]

7. Теорема Борсука-Улама (многомерный случай без доказательства). Применения в комбинаторике. [M03]

8. Конфигурационное пространство пар различных точек (взрезанный квадрат). Препятствие взрезанного квадрата к вложимости в $\mathbb{R}^m$. Теоремы его пол-

ноты (без доказательства). [S, 2.2] [S06, §5]

9. Отображения n-мерного гиперграфа в n-мерную сферу. [S, §7.5]

10. Коэффициент зацепления. Инвариант Хопфа. Отображения трехмерной сферы в двумерную. Применения в теории электричества и магнетизма. [S20, §8.6]

11. Гомотопических группы. Коэффициенты зацепления в гомотопических группах. Зацепление Уайтхеда. Классификация Хефлигера-Зимана многомерных зацеплений. Инвариант Хефлигера-Ву. Теоремы его полноты (без доказательства). [S20, §14] [S06, §3, §5]

12. Теорема Фрейденталя о надстройке (трудная часть без доказательства). Произведение Уайтхеда. [FF]

13. Алгоритмическая неразрешимость проблем продолжения отображений и вложимости гиперграфов. Теоремы алгоритмической разрешимости (без доказательства). [CKM, FWZ]

14.* Конфигурационное пространство наборов из r различных точек. Простейшие теоремы топологической комбинаторики. [2, §§2, 5.9] [S18, §2]

15.* Конструкция Понтрягина: оснащенные многообразия и их кобордизмы. Отображения многообразия в окружность и n-мерного многообразия в n-мерную сферу (Хопф). Реализация подмногообразиями целочисленных циклов коразмерности 1. [S20, §8, 15]

16.* Теорема Смейла-Хирша о классификации погружений (h-принцип Громова для погружений). Погружения сфер и гомотопические группы многообразий Штифеля. [S20, §15]

Литература

[CKM] M. Cadek, M. Krcal, J. Matousek, L. Vokrinek, U. Wagner, Extendability of continuous maps is undecidable, Discr. Comp. Geom. 51 (2014) 24-66, arXiv:1302.2370.

[FF] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, М, Наука, 1989.

[FWZ] M. Filakovsky, U. Wagner, S. Zhechev, Embeddability of Simplicial Complexes is Undecidable, Oberwolfach reports 39 (2019).

[M03] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Verlag, 2008.

[S06] A. Skopenkov. Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342, arXiv:0604045.

[S18] A. Skopenkov. Invariants of graph drawings in the plane, Arnold Math. J., to appear. Full version: arXiv:1805.10237.

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.