

А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ

ГОДОВОЙ КУРС «АЛГЕБРА – 1»

НМУ, 1920/21 учебный год

темы, набранные курсивом могут стать необязательными или упраздниться вовсе.

ПРОГРАММА ВТОРОГО СЕМЕСТРА (13-14 НЕДЕЛЬ)

- НЕДЕЛЯ 1. Повторение: классификация пространств с операторами. Нильпотентные и полупростые операторы. Циклические векторы. Собственные подпространства, собственные значения и диагонализуемые операторы. Свойства коммутирующих операторов. Разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств по разложению аннулирующего многочлена на множители. Корневое разложение. Вычисление функций от матриц и операторов при помощи полиномиальной интерполяции.
- НЕДЕЛЯ 2. Группы преобразований и абстрактные группы. Примеры и свойства гомоморфизмов. Действие группы на множестве, длины и число орбит. Регулярное представление, смежные классы. Внутренние автоморфизмы, классы сопряжённости, нормальные подгруппы, фактор группы. Примеры: группы фигур, симметрические и знакопеременные группы, линейная, аффинная и проективная группы над конечными полями.
- НЕДЕЛЯ 3. p -группы и теоремы Силова. Прямые и полупрямые произведения. Простые группы и теорема Жордана – Гёльдера.
- НЕДЕЛЯ 4. Свободные группы и задание групп образующими и соотношениями. Примеры групп, порождённых отражениями: группы платоновых тел, симметрическая группа (= полная группа правильного симплекса).
- НЕДЕЛЯ 5. *Классификация евклидовых групп Кокстера, систем корней и правильных многогранников.*
- НЕДЕЛЯ 6. Пространство с билинейной формой (над любым полем): корреляции, ядро и ранг. Невырожденные билинейные формы: соответствие между формами и операторами; двойственные базисы; ортогоналы, ортогональные разложения и ортогональные проекции; канонический оператор и классификация невырожденных билинейных форм над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.
- НЕДЕЛЯ 7. Пространство со скалярным произведением (над любым полем): существование ортогонального базиса, разложение в прямую сумму анизотропного и гиперболического подпространств, ортогональная группа порождается отражениями и транзитивно действует на изотропных и гиперболических подпространствах заданной размерности.
- НЕДЕЛЯ 8. Квадратичные формы (над произвольным полем характеристики, отличной от двух): поляризация, классификация над полями \mathbb{C} , \mathbb{R} и \mathbb{F}_q , отыскание индекса вещественной квадратичной формы. Примеры из геометрии проективных и аффинных квадратиков.
- НЕДЕЛЯ 9. Симплектические пространства: существование базиса Дарбу, лагранжевы подпространства и антисамосопряжённые операторы. Симплектическая группа транзитивно действует на изотропных и лагранжевых подпространствах заданной размерности. *Грассмановы квадратичные формы, критерий разложимости. Пфаффиан кососимметричной матрицы.*
- НЕДЕЛЯ 10. Эрмитовы пространства: ортогонализация, длины, углы, объём, ортогональное проектирование, унитарная группа. Ортогональная диагонализация нормальных операторов, канонический вид самосопряжённых, антисамосопряжённых и унитарных операторов.
- НЕДЕЛЯ 11. SVD-разложение линейных отображений и полярное разложение невырожденного оператора. Экспоненциальное отображение.

НЕДЕЛЯ 12. Комплекси́фикация и ове́ществление, вещественный геометрический смысл комплексных собственных векторов. Эрмитово продолжение евклидовой структуры, канонический вид вещественных евклидово (анти) самосопряжённых и ортогональных операторов.

НЕДЕЛЯ 13. Кэлеровы тройки, описание кэлеровых троек, продолжающих заданную симплектическую структуру до эрмитовой: зигелево полупространство и соотношения Римана.

НЕДЕЛЯ 14. Тело \mathbb{H} , норма, сопряжение, чисто мнимые кватернионы. Действие сопряжением, универсальное накрытие $S^3 \simeq \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$. Два семейства эрмитовых структур на \mathbb{H} , спиноры. Расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$. Приложение кватернионов в геометрии четырёхмерных правильных многогранников.