ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

Курс А.Б. Скопенкова

Будут изучаться важные наглядные объекты математики: векторные поля на двумерных и трехмерных поверхностях. Векторные поля являются одним из важнейших объектов топологии, теории динамических систем и их приложений.

Основное содержание курса — демонстрация алгебраических идей *теории гомологий* на примере решения классических проблем о существовании и классификации векторных полей. Эта теория имеет приложения во многих областях естествознания, позволяя строить необходимые алгоритмы. Венец курса — простые доказательства теорем о существовании нормальных полей на двумерных и трехмерных подмногообразиях евклидова простанства.

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения достаточно знания математическому анализу нескольких переменных, а также гомотопической классификации отображений окружности в окружность [S20, §3]. Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

Экзамен состоит из решения задач в течение семестра и письменных контрольных работ.

Подробная информация (в частности, задачи к 1-му занятию): страница А. Скопенкова, перейти на `http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#vefi`.

Примерная программа

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`.

1. Векторные поля на двумерных поверхностях. Теорема о еже. [S20, §4]

2. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на поверхности. [S20, §4]

3. Нормальные векторные поля на двумерных поверхностях. Существование ненулевого нормального векторного поля на ориентируемой двумерной поверхности в четырехмерном пространстве. [S20, §4]

4. Векторные поля на подмножествах трехмерного пространства. Теорема Брауэра о неподвижной точке для трехмерного шара. Степень отображения. [S20, §8]

5. Теорема Хопфа о существовании ненулевого касательного векторного поля на любом трехмерном многообразии. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля для многомерных многообразий. [S20, §8]

6. Нормальные векторные поля для трехмерных многообразий. [S20, §8]

7. Гомологии двумерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность (двойственность Пуанкаре). [S20, §6]

8. Гомологии трехмерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность (двойственность Пуанкаре; без доказательства). [S20, §10]

Дополнительная литература:

Д.В. Аносов, Отображения окружности, векторные поля и их применения. Москва, МЦНМО, 2003.

В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, Наглядная топология. Москва, Наука, 1982