

## ПРОГРАММА ГОДОВОГО КУРСА «АЛГЕБРА – 2»

темы, набранные курсивом могут стать необязательными или упраздниться вовсе

### ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР (14-15 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Тензорное произведение модулей над коммутативным кольцом, стандартные изоморфизмы. Тензорные произведения абелевых групп.

НЕДЕЛЯ 2. Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры векторного пространства. Свёртки. Линейный носитель тензора.

НЕДЕЛЯ 3. Симметричные и кососимметричные тензоры. Поляризация многочленов и грассмановых многочленов над полем характеристики нуль, частные производные. Задание многообразий Веронезе и Грассмана квадратичными уравнениями.

НЕДЕЛЯ 4. Кольцо симметрических функций. Производящие функции стандартных базисов  $m_\lambda$ ,  $e_\lambda$ ,  $h_\lambda$ ,  $p_\lambda$  и переходы между ними. Детерминантные многочлены Шура, формулы Джамбелли и Пьери (выражение  $s_\lambda$  через  $h_k$ , а  $s_\lambda \cdot h_k$  — через  $s_\mu$ ).

НЕДЕЛЯ 5. Пространства с операторами: приводимость, разложимость, лемма Шура. Полупростые модули над ассоциативной алгеброй: теорема плотности, теорема о двойном централизаторе, теорема Бернсайда.

НЕДЕЛЯ 6.  $\mathfrak{sl}_2$ -модули: описание конечномерных неприводимых  $\mathfrak{sl}_2$ -модулей и полная приводимость конечномерных  $\mathfrak{sl}_2$ -модулей.

НЕДЕЛЯ 7. Представления конечных групп: полупростота групповой алгебры, теория характеров, кольцо представлений, (ко)индуцирование, двойственность Фробениуса.

НЕДЕЛЯ 8. Язык категорий и функторов, примеры: чумы, симплициальные множества, геометрическая реализация, предпучки. Морфизмы функторов, эквивалентности категорий, примеры дуализирующих объектов и двойственностей. Представимые предпучки, лемма Ионеды:  $\text{Hom}_{\mathcal{F}un}(h_X, F) = F(X)$ , задание объектов «универсальными свойствами».

НЕДЕЛЯ 9. Сопряжённые функторы, примеры: индуцирование – ограничение скаляров – коиндуцирование в теории представлений и геометрическая реализация – сингулярный симплициальный комплекс в комбинаторной топологии. Пределы и копределы диаграмм, всякий предпучок является пределом представимых. *Фильтрующиеся категории и описание (ко)пределов (ко)фильтрующихся диаграмм.*

НЕДЕЛЯ 10. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм, теорема о биекции и её следствия (тождества Коши и Шура, соотношения на количества таблиц и т. п.). DU-множества и DU-орбиты, комбинаторные полиномы Шура, правило Литтлвуда – Ричардсона, тождество Якоби – Труды (равенство детерминантных и комбинаторных полиномов Шура).

НЕДЕЛЯ 11. Представления симметрических групп: симметризаторы Юнга, модули Шпехта, формула Фробениуса для характеров. Кольцо представлений симметрических групп, функторы Шура. *Двойственность Шура – Вейля.*

### ВТОРОЙ СЕМЕСТР (13-14 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Целые расширения коммутативных колец: целые элементы образуют кольцо, целые расширения транзитивны, если в целом расширении одно из колец является полем, то и другое является полем, если не имеет делителей нуля. Лемма Гаусса: если в  $B[x]$  выполнено равенство  $fg = h$  и старшие коэффициенты  $f, g$  равны единице, то все коэффициенты  $h$  целы над  $A \subset B$  тогда и только тогда, когда целы все коэффициенты и у  $f$  и у  $g$ . Приложения к теории представлений конечных групп.

- НЕДЕЛЯ 2. Конечно порождённые коммутативные алгебры. Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе полиномиального идеала, нётеровость конечно порождённых алгебр над полем. Базис трансцендентности и трансцендентная размерность конечно порождённой алгебры над полем. Конечно порождённая алгебра над полем  $\mathbb{k}$  может быть полем только если она алгебраична над  $\mathbb{k}$ .
- НЕДЕЛЯ 3. Теорема Гильберта о нулях. Теория исключения и системы результатов. Аффинные алгебраические многообразия.
- НЕДЕЛЯ 4. Эквивалентность категории конечно порождённых коммутативных алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем и категории аффинных алгебраических многообразий: максимальные спектры и гомоморфизмы вычисления, обратный образ регулярных функций, топология Зарисского, непрерывность регулярных морфизмов.
- НЕДЕЛЯ 5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр: замкнутые вложения, доминантные морфизмы, замкнутость конечных морфизмов и открытость конечных морфизмов в нормальное многообразие. *Нормализация*. Расслоенные произведения в категории многообразий и тензорные произведения алгебр.
- НЕДЕЛЯ 6. *Алгебраические многообразия: аффинные карты и структурный пучок, главные открытые множества, локализация. Пример: проективные многообразия, конечные проекции. Неприводимые компоненты.*
- НЕДЕЛЯ 7. *Размерность алгебраического многообразия. Теоремы о размерностях слоёв. Вычисление размерностей проективных многообразий.*
- НЕДЕЛЯ 8. Алгебраические расширения полей. Сепарабельность, нормальность и продолжение гомоморфизмов. Примитивные расширения. Поле разложения и алгебраическое замыкание.
- НЕДЕЛЯ 9. Автоморфизмы полей и соответствие Галуа. Группы Галуа полей и многочленов, способы вычисления. Пример: построения циркулем и линейкой.
- НЕДЕЛЯ 10. Группы круговых полей и элементы Фробениуса. Циклические расширения, *теория Куммера*. Разрешимые расширения.
- НЕДЕЛЯ 11. Стандартные точные последовательности модулей: лемма о змее и т. п. Исчисление градуированных модулей: кошулево правило знаков, тензорные произведения и гомоморфизмы, дифференцирования. Исчисление комплексов: тензорные произведения и морфизмы, гомотопии и гомологии, связывающий гомоморфизм.
- НЕДЕЛЯ 12. Примеры комплексов и (ко)гомологий: симплициальный комплекс симплициального множества, комплексы Кошуля, бар-конструкция. Фильтрованные комплексы, бикомплексы, точные пары и спектральные последовательности.