ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКУЮ КОМБИНАТОРИКУ

Курс А.Б. Скопенкова

Топологическая комбинаторика возникла на стыке комбинаторики, геометрии, топологии и программирования. На примере изучения основных классических и современных результатов мы освоим основные методы этой области — конфигурационные пространства, эквивариантные отображения, когомологии.

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для его изучения достаточно уметь классифицировать с точностью до гомотопии непрерывные отображения из окружности в себя (см., например, [S20, §3]; нужно именно классифицировать, а не выводить классификацию из теорем, доказательства которых Вы не знаете). Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура.

Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих. Каждое домашнее задание, кроме первого, состоит из материала предыдущей лекции. Образцы домашних заданий приведены на страничке курса `http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#topcomb`. Они дают представление как об объеме работы участников курса в течение семестра, так и о результатах этой работы. Курс ориентирован на студентов НМУ, но его могут изучать все желающие, перед каждой лекцией разбирающиеся с предыдущей. Подробная информация (в частности, задачи к 1-му занятию и правила выставления оценки за экзамен) приведена на страничке курса.

Занятия для студентов НМУ проходят раз в неделю, 2 академических часа. (Отличную отметку по курсу студенты НМУ могут получить, не проходя углубленного изучения, которое предлагается студентам МФТИ и проходит 4 академических часа по другим дням недели.)

Примерная программа

1. Линейные теоремы и гипотезы о неотъемлемых пересечениях: Радона, Тверберга, ван Кампена-Флореса (формулировка). Вывод теоремы Тверберга из цветной теоремы Каратеодори. [S, §2, §6], [RRS]

2. Отображения без r-кратных точек и почти r-вложения. Топологические версии теорем и гипотез о неотъемлемых пересечениях (формулировки). Доказательство топологической теоремы Радона: число Радона (только идея) или вывод из теоремы Борсука-Улама. [S, §2, §6], [S16, §1].

3. Степень отображения по модулю 2. Простое доказательство теоремы Борсука-Улама. Применения в комбинаторике. [S, §5.9], [S20, §3, §8], [M03]

4. Редукции топологической гипотезы Тверберга к «крайней» размерности,

к маломерным остовам и к r-кратной теореме ван Кампена-Флореса. План доказательства контрпримера к гипотезе в случае, когда r — не степень простого. [S, §6], [S16, §1.2, §3.1].

5. Конфигурационное пространство пар различных точек (взрезанный квадрат). Взрезанные квадраты некоторых графов. Идея построения алгоритма распознавания реализуемости k-мерных гиперграфов в $\mathbb{R}^d$ при $2d \geq 3k+3$. Взрезанный джойн. [S, §5.12], [S06, §5]

6. Конфигурационное пространство наборов из r различных точек. Взрезанный r-кратный джойн. Радужные разбиения. Обобщение теоремы Борсука-Улама на действие группы вычетов по модулю простого r. Доказательство топологической теоремы Тверберга для простого r. [S, §6], [S18, §2.3]

7. Теорема Брауэра о неподвижной точке и лемма Шпернера. Применения в математической экономике. [S20, §3, §8], [S89]

8. Зачем еще нужна гомотопическая классификация: формулировки результатов о существовании и классификации векторных полей, многомерных зацеплений и погружений. [S20, §9, §12, §15.2]

9. Алгоритмическая разрешимость гомотопности замкнутых ломаных на плоскости без двух точек. [S20, §3.2]

10. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания гомотопности замкнутых ломаных в двумерных гиперграфах (т.е. петель в двумерных комплексах). [S20, §14.3]

Литература

[L13] M. de Longueville. A course in topological combinatorics. Universitext. Springer, New York (2013).

[M03] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Verlag, 2008.

[RRS] V. Retinskiy, A. Ryabichev and A. Skopenkov. Motivated exposition of the proof of the Tverberg Theorem (in Russian). Mat. Prosveschenie, 27 (2021), 166–169. arXiv:2008.08361.

[S89] Ю. А. Шашкин, Неподвижные точки, М., Наука, 1989.

[S06] A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342, arXiv:0604045.

[S16] А. Б. Скопенков, Топологическая гипотеза Тверберга, УМН, 73:2 (2018), 344–377; полная обновляемая версия: arXiv:1605.05141.

[S18] A. Skopenkov, Invariants of graph drawings in the plane, Arnold Math. J., 6 (2020) 21–55; full updated version: arXiv:1805.10237.

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.