

Топология – 2
Экзамен (первая попытка)
17 декабря 2023

На экзамене разрешается использовать любые бумажные материалы, но нельзя пользоваться интернетом и общаться.

Задача 1. Вычислите $\pi_2(\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^3)$.

Задача 2. Предположим, $\pi_n(X, A) \simeq \mathbb{Z}$ для клеточной пары $A \subset X$. Всегда ли можно приклеить к X клетку D размерности $n + 1$ так, что $\pi_n(X \cup D, A) = 0$?

Задача 3. Для стандартного разбиения симплекса Δ^7 на грани, вычислите $\pi_2(\text{sk}^2(\Delta^7))$.

Задача 4. Приклеим к \mathbb{RP}^3 четырёхмерную клетку D^4 при помощи композиции

$$\partial D^4 = S^3 \rightarrow S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3,$$

где второе отображение — стандартное накрытие, а первое отображение имеет степень 7. Вычислите **а)** гомологии и **б)** когомологии получившегося пространства с коэффициентами в \mathbb{Z} .

Задача 5. Склеим две копии \mathbb{RP}^6 по стандартно вложенному в них \mathbb{RP}^3 . Вычислите гомологии полученного пространства $H_\bullet(\mathbb{RP}^6 \cup_{\mathbb{RP}^3} \mathbb{RP}^6; \mathbb{Z})$.

Задача 6. Про конечный клеточный комплекс X известно, что $H_0(X; \mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4^2$, $H_1(X; \mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_2$, $H_2(X; \mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$, $H_3(X; \mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4$ и $H_k(X; \mathbb{Z}_4) = 0$ при $k > 3$. Найдите все возможные варианты, чему могут равняться группы **а)** $H^\bullet(X; \mathbb{Z}_4)$; **б)** $H_\bullet(X; \mathbb{Q})$.