

Топология – 2
Экзамен (вторая попытка)
18 февраля 2024

На экзамене разрешается использовать любые бумажные материалы, но нельзя пользоваться интернетом и общаться.

Задача 1. Обозначим через $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ пространство наборов из n упорядоченных *различных* точек в \mathbb{R}^d , снабжённое топологией, индуцированной с $(\mathbb{R}^d)^n$. Вычислите $\pi_{d-2}(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d))$ при $d > 2$.

Задача 2. CW -комплекс K имеет по одной клетке размерностей 0 и 2, три клетки размерности 1 и, возможно, какие-то ещё клетки размерности > 2 . Может ли $\pi_1(K)$ быть конечной?

Задача 3. Вырежем из двух копий $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ маленькие открытые шары и склеим их дополнения по гомеоморфизму их граничных сфер. Полученное пространство называется связной суммой $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^3$. **а)** Вычислите $\pi_2(\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^3)$. **б)** Вычислите $H_\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z})$.

Задача 4. Для стандартного клеточного разбиения $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ рассмотрим отображение стягивания 1-остова $k : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2 / \text{sk}^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = S^2$.

а) Покажите, что $k : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \rightarrow S^2$ не нульгомотопно.

б) Покажите, что для любого $l : S^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ композиция $k \circ l : S^2 \rightarrow S^2$ нульгомотопна.

Задача 5. Пусть $X = \text{sk}^4(\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^3)$. Вычислите $H_\bullet(X; \mathbb{Z}_2)$ и $H_\bullet(X; \mathbb{Z}_3)$.

Задача 6. Для пространства X когомологии с коэффициентами в \mathbb{Z}_{25} во всех градуировках (кроме нулевой) изоморфны суммам нескольких копий \mathbb{Z}_5 . Как могут выглядеть когомологии X с коэффициентами в \mathbb{Z}_{125} ?