Топология – 2

Задачи к лекции 1: Гомотопические группы

12 сентября 2023

Задача 1. Постройте естественный[1] изоморфизм $\pi_n(X) \to \pi_{n-1}(\Omega X)$ и выведите, что фундаментальная группа любого пространства петель абелева.

Задача 2. Вычислите π_2 для **а)** двумерного тора; **б)** проективной плоскости; **в)** букета $S^2 \vee S^3$.

Задача 3. Докажите, что $\pi_n(\mathbb{RP}^\infty) = 0$ для всех $n > 1$.

Задача 4. **а)** При помощи универсального накрытия определите действие $\pi_1(X)$ на $\pi_n(X)$.

б) Докажите, что для линейно связного X группа $\pi_n(X)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора отмеченной точки.

Задача 5. **а)** Покажите, что для любых X, Y множество $\langle \Sigma X, Y \rangle$ имеет структуру группы.

б) Покажите, что на $\langle \Sigma\Sigma X, Y \rangle$ есть две такие операции, назовём их $\bullet$ и $*$, и проверьте, что

$$(\alpha_1 \bullet \alpha_2) * (\alpha_3 \bullet \alpha_4) = (\alpha_1 * \alpha_3) \bullet (\alpha_2 * \alpha_4). \tag{1}$$

в) (*Аргумент Экмана-Хилтона*) Покажите, что если на множестве G есть две групповых операции, удовлетворяющие условию (1), то они совпадают и являются коммутативными. Выведите из этого, что $\pi_n(Y)$ коммутативна при $n > 1$.

[1] Слово *естественный* — синоним к слову *функториальный*, то есть согласованный с отображениями пространств.