

Задачи к лекции 3:

Точные последовательности и расслоения

26 сентября 2023

Задача 1. Для каких из следующих пар $A \subset X$ имеет место изоморфизм $\pi_n(X, A) \simeq \pi_n(X/A)$ при всех n ? **а)** $S^k \subset \mathbb{R}^m$, где $k < m$. **б)** $S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1$. **в)** X — полноторие, A — замкнутая несамопересекающаяся кривая, проходящая вдоль X два раза. **г*)** $S^2 \subset S^2 \vee S^2$.

Задача 2. Когда имеется короткая точная последовательность групп $0 \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow G'' \rightarrow 0$, говорят, что G' является расширением G'' при помощи G .

а) Докажите, что если $A \subset X$ является (не обязательно деформационным) ретрактом X , то $\pi_n(X)$ является расширением $\pi_n(X, A)$ при помощи $\pi_n(A)$ при всех n .

б) Докажите, что если Id_X гомотопно некоторому отображению, образ которого лежит в A , то $\pi_n(A)$ является расширением $\pi_n(X)$ при помощи $\pi_{n+1}(X, A)$ при всех n .

в) Докажите, что если вложение $A \rightarrow X$ нульгомотопно, то $\pi_n(X, A)$ является расширением $\pi_{n-1}(A)$ при помощи $\pi_n(X)$ при всех n .

г*) Докажите, что эти расширения тривиальны, то есть, в терминах выше, $G' \simeq G \oplus G''$.

Задача 3. Пусть $A \subset B$ — произвольные подмножества топологического пространства X . Определите последовательность тройки

$$\dots \rightarrow \pi_n(B, A) \rightarrow \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_n(X, B) \rightarrow \pi_{n-1}(B, A) \rightarrow \pi_{n-1}(X, A) \rightarrow \dots$$

и докажите её точность.

Задача 4. а) Покажите, что вокруг точки $(1 : 0) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ можно выбрать диск D , прообраз которого при расслоении Хопфа $h : S^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ гомеоморфен полноторию $D \times S^1$, причём композиция гомеоморфизма и h равна проекции $D \times S^1 \rightarrow D$.

б) Выведите, что расслоение Хопфа действительно является локально тривиальным расслоением.

в) Приклеим к $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ четырёхмерную клетку по отображению h , определённом на её границе. Докажите, что результат гомеоморфен $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

г*) Докажите, что не существует ретракции $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.