

Задачи к лекции 4:

Расслоения и гомотопические группы: месь Йонеды

10 октября 2023

Задача 1. а) Докажите, что $SO(3)$ гомеоморфно \mathbb{RP}^3 . б*) И что $SO(4)$ гомеоморфно $\mathbb{RP}^3 \times S^3$.

Задача 2. Вычислите а) $\pi_1(SO(n))$; б) $\pi_2(SO(n))$; в*) $\pi_3(SO(n))$ при $n = 2, 3, \dots$

Задача 3. а) Вычислите гомотопические группы $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. б*) Докажите, что S^2 имеет такие же гомотопические группы, как $S^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$, но они не гомотопически эквивалентны.

Задача 4. Покажите, что если расслоение $p : E \rightarrow B$ имеет сечение¹, или если существует ретракция E на слой $F \subset E$, то $\pi_n(E) \simeq \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$ при $n = 2, 3, \dots$

Задача 5. Проверьте, что а) ортогональная проекция прямоугольного треугольника на один из катетов является расслоением Серра; б) ортогональная проекция объединения катетов на один из них не является расслоением Серра.

Задача 6. Докажите, что для любого отображения $f : X \rightarrow Y$ найдутся пространство X' , гомотопическая эквивалентность $X \rightarrow X'$ и расслоение Серра $X' \rightarrow Y$, такие что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ & \searrow f & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

коммутативна. Опишите слои полученного расслоения Серра.

Указание: в качестве X' возьмите пространство пар $\{(x, \gamma) : x \in X, \gamma : [0; 1] \rightarrow Y, \gamma(0) = f(x)\}$.

Задача 7*. По паре связных CW -комплексов $A \subset X$ постройте пространство Y , такое что $\pi_{n-1}(Y) \simeq \pi_n(X, A)$ при всех n .

Задача 8. Отображение линейно связных пространств $X \rightarrow Y$ называется *слабой эквивалентностью*, если все индуцированные отображения $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ являются изоморфизмами.

а) Докажите, что если $X \rightarrow Y$ — слабая эквивалентность, то она индуцирует биекцию $\langle A, X \rangle \rightarrow \langle A, Y \rangle$ для любого связного CW -комплекса A с отмеченной точкой.

б) Докажите естественность по A биекции из предыдущего пункта, а именно, что отображение $A \rightarrow B$ даёт коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \langle B, X \rangle & \longrightarrow & \langle B, Y \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle A, X \rangle & \longrightarrow & \langle A, Y \rangle \end{array}$$

в*) Выведите², что слабая эквивалентность для связных CW -комплексов совпадает с гомотопической эквивалентностью.

Задача 9*. Существует ли $f : S^2 \vee S^2 \rightarrow S^2 \vee S^2$, не гомотопное тождественному, но такое что $f \circ f \circ f$ гомотопно тождественному?

¹Сечением называется правое обратное — такое отображение $s : B \rightarrow E$, что $p \circ s = \text{Id}_B$. Интересно, что здесь можно требовать выполнение данного равенства лишь с точностью до гомотопии.

²Это рассуждение называется леммой Йонеды.