

## Морфизмы комплексов и цепные гомотопии

24 октября 2023

Везде ниже по умолчанию рассматриваются *сингулярные* комплексы и гомологии.

**Задача 1. а)** Для линейно связного пространства  $X$  докажите, что  $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ .

**б)** Для пространства  $X$ , имеющего  $s$  компонент линейной связности, докажите, что  $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}^s$ .

**Задача 2.** Проверьте, что любое отображение линейно связных пространств  $X \rightarrow Y$  индуцирует изоморфизм  $H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ .

**Задача 3.** Докажите, что если  $X = X_1 \sqcup X_2$ , то  $H_n(X) \simeq H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$  при всех  $n$ .

Пусть даны комплексы  $C_\bullet$  и  $C'_\bullet$ . Напомним, набор отображений  $f_n : C_n \rightarrow C'_n$  называется *морфизмом комплексов*, если  $f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$  для всех  $n$ .

**Задача 4.** Морфизм комплексов называется *квазиизоморфизмом*, если он индуцирует изоморфизм в гомологиях. Постройте какой-нибудь квазиизоморфизм между комплексом симплициальных цепей отрезка  $\Delta^1$  и комплексом симплициальных цепей треугольника  $\Delta^2$ .

Напомним, морфизмы  $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  называются *цепногомотопными*, если при всех  $n$

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ d_n$$

для некоторого набора отображений  $\psi_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$  (называемого *цепной гомотопией*).

**Задача 5.** Приведите пример двух морфизмов комплексов, которые индуцируют одинаковые отображения в гомологиях, но не являются цепногомотопными.

**Задача 6.** Пусть  $f, g : X \rightarrow Y$  — гомотопные отображения. Для сингулярного симплекса  $\varphi : \Delta^n \rightarrow X$  положим

$$\psi_n(\varphi) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot F \circ u_j,$$

где  $u_j : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \times [0; 1]$  — аффинное отображение, переводящее вершины  $0, 1, \dots, n+1$  в вершины  $0 \times 0, \dots, j \times 0, j \times 1, \dots, n \times 1$ , а  $F : \Delta^n \times [0; 1] \rightarrow Y$  — гомотопия, применённая к  $\varphi$ .

**а)** Докажите, что  $d_{n+1}^Y(\psi(\varphi))$  состоит из образов  $n$ -мерных симплексов, на которые разбита граница  $\partial\Delta^n \times [0; 1]$ . **б)** Докажите, что  $g_n - f_n = d_{n+1}^Y \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ d_n^X$ .

**Задача 7.** Задайте триангуляцию  $\Delta^m \times \Delta^n$ , имеющую  $m+n$  симплексов размерности  $m+n$ .

**Задача 8.** Определим *барицентрическое разбиение* симплекса индуктивно. Для  $\Delta^1$  это разбиение на две равные части. Для  $\Delta^n$  в центре берётся новая вершина и части разбиения определяются как выпуклые оболочки её и одной из частей на границе; при этом центр в каждой из частей является вершиной с номером  $n$ .

**а)** Докажите, что замена каждого сингулярного симплекса на сумму частей его барицентрического разбиения задаёт морфизм  $C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X)$  (для этого у частей нужно правильным образом определить знак). **б\*)** Проверьте, что это квазиизоморфизм, **в\*)** причём цепногомотопный тождественному.

**Задача 9\*.** Вычислите гомологии замыкания графика  $y = \sin \frac{1}{x}$  на плоскости.