

Задачи к лекции 7:

Точная гомологическая последовательность пары

7 ноября 2023

Задача 1. Докажите, что если вложение $A \rightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью, то $H_n(X, A) = 0$ при всех n . Верно ли то же, если известно лишь, что подмножество $A \subset X$ гомотопически эквивалентно всему X ?

Задача 2. Пусть $A \subset X$ — подкомплекс в CW -комплексе. Докажите, что фактор X/A гомотопически эквивалентен $X \cup_A CA$ — результату приклеивания к X конуса над A .

Задача 3. Для пар $A \subset X$ и $B \subset Y$ скажем, что задано *отображение пар* $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, если задано $f : X \rightarrow Y$ и $f(A) \subset B$. Аналогично определяется *гомотопия отображений пар*. Докажите, что отображение $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ индуцирует гомоморфизм $H_\bullet(X, A) \rightarrow H_\bullet(Y, B)$ и что гомотопные отображения индуцируют равные гомоморфизмы. Выведите, что если пары (X, A) и (Y, B) гомотопически эквивалентны, то их относительные гомологии изоморфны.

Задача 4. Для клеточной пары $A \subset X$ установите изоморфизм $H_\bullet(X, A) \simeq \tilde{H}_\bullet(X/A)$.

Задача 5. (*5-лемма*) Дана коммутативная диаграмма абелевых групп, строки которой точны

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 \\ p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow & & s \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 \end{array}$$

а) Докажите, что если p и r эпиморфизмы, а s мономорфизм, то q эпиморфизм.

б) Докажите, что если q и s мономорфизмы, а p эпиморфизм, то r мономорфизм.

в) Выведите, что если отображение пар $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ индуцирует изоморфизмы $H_\bullet(X) \rightarrow H_\bullet(Y)$ и $H_\bullet(A) \rightarrow H_\bullet(B)$, то оно также индуцирует изоморфизм $H_\bullet(X, A) \rightarrow H_\bullet(Y, B)$.

Задача 6. Докажите, что пары (D^n, S^{n-1}) и $(D^n, D^n \setminus 0)$ не гомотопически эквивалентны, но имеют одинаковые относительные гомологии.

Задача 7. Вычислите¹ а) $H_\bullet(D^n, \partial D^n)$; б) $H_\bullet(S^n \sqcup S^n \sqcup S^n, \{x_1, x_2, x_3\})$, где x_i — точка в i -й сфере; в) $H_\bullet(S^n \times S^n, S^n \times x_0)$; г) $H_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus x_0)$.

Задача 8. Докажите, что для вложенных подпространств $A \subset B \subset X$ имеется длинная точная последовательность

$$\dots \rightarrow H_n(B, A) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_{n-1}(B, A) \rightarrow \dots$$

¹Предыдущими задачами разрешается пользоваться без доказательства.