

Задача 1. Докажите точность последовательности Майера-Вьеториса для приведённых гомотопий.

Задача 2. а) Вычислите гомотопии двоеточия Александрова — пространства $\{a, b\}$ с открытыми множествами $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}$.

б) Вычислите гомотопии пространства $\{a, b, c\}$ с базой $\{a\}, \{c\}$.

в) Приведите пример нехаусдорфова пространства X из 4 точек, гомотопии которого изоморфны $H_*(S^1)$. Попробуйте построить непрерывное отображение $S^1 \rightarrow X$, индуцирующее изоморфизм в гомотопиях.

Задача 3. Пусть $A \subset X$ — подкомплекс в а) конечном; б) произвольном CW -комплексе. Докажите, что существует окрестность $U \supset A$, строго деформационно ретрагирующаяся на A .

Задача 4. а) Докажите, что для любого n найдётся $C < 1$ такое что у любого n -мерного симплекса в евклидовом пространстве, имеющего диаметр l , каждый из $n!$ симплексов его барицентрического подразделения имеет диаметр $< l \cdot C$. (Диаметр — максимум расстояния между точками.)

б) Выведите, что если $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ — сингулярный симплекс, и $U \cup V = X$ — открытое покрытие, то для некоторого k у k -кратного барицентрического разбиения σ все симплексы лежат в U или в V .

Задача 5. Дано n -мерное многообразие M с краем. Как локальные гомотопии $H_*(M, M \setminus \{x\})$ зависят от того, лежит ли точка $x \in M$ на крае.

Задача 6. Для любой пары (X, A) постройте естественные изоморфизмы

$$\tilde{H}_*(X \cup CA) \rightarrow H_*(X \cup CA, CA) \quad \text{и} \quad H_*(X, A) \rightarrow H_*(X \cup CA, CA).$$

Задача 7. Выпишите последовательность Майера-Вьеториса для

а) покрытия тора двумя цилиндрами;

б) покрытия бутылки Клейна двумя цилиндрами;

в) покрытия тора окрестностью параллели с меридианом и дополнению к параллели с меридианом.

Задача 8. При помощи последовательности Майера-Вьеториса вычислите гомотопии

а) сферы с n дырками и k вклеенными лентами Мёбиуса; б) $\mathbb{R}P^n$ для всех $n = 1, 2, \dots$