

## Задачи к лекции 10:

## Гомологии с коэффициентами. Гомоморфизм Гуревича

28 ноября 2023

**Задача 1.** Пусть все  $H_k(X; \mathbb{Z})$  свободны (т. е. изоморфны  $Z^{m_k}$  для  $m_k = 0, 1, 2, \dots$ ). Докажите, что  $H_k(X; A)$  также свободны для любого кольца коэффициентов  $A$ .

**Задача 2.** Вычислите гомологии а)  $\mathbb{RP}^9$ ; б) бутылки Клейна; в)  $L(10, 1)$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_{24}$ .

**Задача 3. а)** Покажите, что тензорное умножение комплекса на  $A$  индуцирует морфизм комплексов  $C_\bullet(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_\bullet(X; A)$  и, следовательно, даёт гомоморфизм  $H_\bullet(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_\bullet(X; A)$ .

Вычислите его в случае б)  $H_\bullet(S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_\bullet(S^3; \mathbb{Z}_2)$ ; в)  $H_\bullet(\mathbb{RP}^5; \mathbb{Z}) \rightarrow H_\bullet(\mathbb{RP}^5; \mathbb{Z}_8)$ .

**Задача 4. а)** Пусть  $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$  — точная последовательность абелевых групп. Постройте естественную по  $X$  точную последовательность

$$\dots \rightarrow H_n(X; A_1) \rightarrow H_n(X; A_2) \rightarrow H_n(X; A_3) \rightarrow H_{n-1}(X; A_1) \rightarrow \dots$$

Гомоморфизм  $H_n(X; A_3) \rightarrow H_{n-1}(X; A_1)$  называется *гомоморфизмом Бокштейна*.

б) Вычислите гомоморфизм Бокштейна  $H_n(\mathbb{RP}^k; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{RP}^k; \mathbb{Z}_2)$  для точной последовательности коэффициентов  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ .

**Задача 5\*.** Как, зная гомологии конечного  $CW$ -комплекса с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ , вычислить его гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ?

**Задача 6.** Приведите пример  $CW$ -комплекса  $X$  и числа  $n$ , такого что  $\pi_n(X) \neq 0$  и  $H_n(X) \neq 0$ , но гомоморфизм Гуревича  $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$  нулевой.

**Задача 7. а)** Докажите, что если  $CW$ -комплекс  $X$  односвязен и  $H_\bullet(X) \simeq H_\bullet(S^k)$ , то  $X \approx S^k$ .

б) Покажите, что для неодносвязного  $X$  это неверно.

**Задача 8\*.** Докажите, что все произведения Уайтхеда лежат в ядре гомоморфизма Гуревича.