

## Задачи к лекции 11:

## Формула универсальных коэффициентов. Когомологии

5 декабря 2023

Коэффициентами гомологий и когомологий (когда они не указаны) по умолчанию считаются  $\mathbb{Z}$ .

**Задача 1.** Вычислите когомологии а) бутылки Клейна; б)  $\mathbb{R}P^m$ ; в) пространства, полученного склеиванием противоположных точек экватора сферы  $S^1 \subset S^2$ .

**Задача 2.** Покажите, что  $H^0(X)$  изоморфно пространству  $\mathbb{Z}$ -значных функций на множестве компонент линейной связности  $X$ . Убедитесь, что  $H^0(X) \simeq H_0(X)$  если и только если это множество конечно.

**Задача 3.** а) Для факторизаций  $S^5 \rightarrow \mathbb{R}P^5$  и  $\mathbb{R}P^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  вычислите индуцированные отображения в гомологиях. б) То же для когомологий.

**Задача 4.** а) Для гомоморфизма абелевых групп  $A \rightarrow B$  докажите, что

$$\operatorname{coker}(A \otimes C \rightarrow B \otimes C) = \operatorname{coker}(A \rightarrow B) \otimes C.$$

б) Покажите, что для ядра аналогичный факт неверен.

в\*) Покажите, что  $\operatorname{Tor}(A, B)$  не зависит от выбора свободной<sup>1</sup> резольвенты для  $A$  и **г\*)** что он равен  $\operatorname{Tor}(B, A)$ .

**Задача 5.** а) Докажите, что  $H_\bullet(X; \mathbb{Q}) \simeq H_\bullet(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ .

б) Верно ли, что  $H_\bullet(X; \mathbb{Z}_2) \simeq H_\bullet(X; \mathbb{Z}_4) \otimes \mathbb{Z}_2$ ?

в) Докажите, что  $H_\bullet(X; \mathbb{Z}_{12}) \simeq H_\bullet(X; \mathbb{Z}_4) \oplus H_\bullet(X; \mathbb{Z}_3)$ .

**Задача 6\*.** Докажите, что точная последовательность

$$0 \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes A \rightarrow H_n(X; A) \rightarrow \operatorname{Tor}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), A) \rightarrow 0$$

расщепляется.

<sup>1</sup>Возможно, здесь будет полезно знать определение и некоторые приёмы работы с *проективными* модулями и резольвентами (вместо свободных), о которых можно отдельно почитать.