Топология – 2

Задачи к лекции 12:
Когомологии, двойственность Пуанкаре, занавес

12 декабря 2023

Задача 1. Вычислите **а)** $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{100}, \mathbb{Z}_{24})$; **б)** $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{100}, \mathbb{Q})$; **в*)** $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{100})$.

Задача 2. а) Докажите, что для замкнутого ориентируемого m-мерного многообразия M и любой абелевой группы G имеют место изоморфизмы $H^k(M; G) \simeq H_{m-k}(M; G)$ при всех k.

б) Покажите, что если M связно, то сумма m-мерных симплексов в триангуляции M является образующей в $H^m(M)$. Она называется *фундаментальным циклом* и обозначается $[M]$.

в) Покажите, что условие замкнутости многообразия опустить нельзя.

г) Покажите, что для неориентируемых многообразий версия теоремы Пуанкаре с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ неверна.

Задача 3. Пусть $[M] = \sum \varphi_i$, где $\varphi_i : \Delta^m \to M$ в обозначениях выше. Для $\alpha \in C^k(M)$ пусть

$$\alpha \frown [M] := \sum \alpha(\varphi_i|_{[0,1,\dots,k]}) \cdot \varphi_i|_{[k,k+11,\dots,m]} \in C_{m-k}(X).$$

Покажите, что $\alpha \frown [M]$ является сингулярным циклом, и что его гомологический класс зависит только от когомологического класса α.

Задача 4. Для $\alpha \in C^k(X)$ и $\beta \in C^n(X)$ и для сингулярного симплекса $\varphi : \Delta^{k+n} \to X$ положим

$$\alpha \smile \beta\ (\varphi) = \alpha(\varphi_i|_{[0,1,\dots,k]}) \cdot \beta(\varphi_i|_{[k,k+1,\dots,k+n]}).$$

Это задаёт гомоморфизм $\smile : C^k(X) \otimes C^n(X) \to C^{k+n}(X)$.

а) Покажите, что $\delta_{k+n}(\alpha \smile \beta) = \delta_k\alpha \smile \beta + \alpha \smile (-1)^k\delta_n\beta$.

б) Выведите, что $\smile$-умножение корректно определено для когомологических классов.

в) Покажите, что $\alpha \smile \beta = (-1)^{kn}\beta \smile \alpha$.