

Избранные сюжеты из топологии поверхностей

Экзамен (первая попытка)

22 декабря 2024

Задача 1. Пусть связная замкнутая ориентируемая поверхность S склеена из n штанов (сфер с тремя дырками) и k дисков. Выразите род S через n и k .

Задача 2. Существует ли разветвлённое накрытие связной поверхности над сферой S^2 степени больше 2 с двумя критическими значениями и имеющее лишь точки ветвления порядка 2? (Если нет — докажите, если да — постройте пример.)

Задача 3. Пусть $S_1 \xrightarrow{p} S_2 \xrightarrow{f} S_3 \xrightarrow{q} S_4$ — отображения связных замкнутых поверхностей, причём f — накрытие, а p и q — схлопывания. Всегда ли $\text{Deg}(q \circ f \circ p) = \text{Deg}(q) \cdot \text{Deg}(f) \cdot \text{Deg}(p)$?

Задача 4. Постройте клеточный комплекс и вычислите гомологии бутылки Клейна с коэффициентами в локальной системе со слоем \mathbb{Z} , меняющей знак при проходе по параллели и по меридиану.

Задача 5. а) Докажите, что у отображения степени 2 из тора в сферу, имеющего лишь особенности типа складки, не менее двух компонент особенностей.

б) Постройте хотя бы одно такое отображение явно.