Избранные сюжеты из топологии поверхностей

Задачи к лекции 1: Многообразия и функции Морса

5 сентября 2024

Задача 1. Покажите, что функция $f : M \to \mathbb{R}$ морсовская если и только если сечение $df : M \to T^*M$ трансверсально нулевому сечению M_0. Буквально это означает, что образы дифференциала отображения df (который определяет вторую производную f) и касательные пространства к M_0 не имеют ненулевых пересечений.

Задача 2. Окружим сферой морсовскую критическую точку индекса k. Направление градиента в каждой точке сферы задаёт отображение $S^{n-1} \to S^{n-1}$. Вычислите его степень (ответ может зависеть от n и k).

Задача 3. Приклеим к одной компоненте цилиндра ручку индекса 1 неориентируемым образом. Полученную поверхность с краем назовём *антиштанами*. Покажите явно, что антиштаны гомеоморфны $\mathbb{RP}^2$ с двумя вырезанными дисками.

Задача 4. Проверьте, что любой гомеоморфизм $S^1 \to S^1$ изотопен диффеоморфизму (это позволяет нам не следить за гладкостью склеек 2-многообразий по краю).

На лекции мы доказали **предложение**: *любое гладкое* 2*-многообразие представляется в виде объединение дисков, штанов и антиштанов, скоеенных по границам.*

Задача 5. а) Выведите из предложения теорему о классификации замкнутых поверхностей: *любое компактное связное* 2*-многообразие без края гомеоморфно сфере* S^2*, либо связной сумме нескольких копий* $\mathbb{T}^2$ *или* $\mathbb{RP}^2$.

Напомним, связная сумма многообразий M и M' одной размерности определяется как результат склейки M и M', из которых выкинуты шары, по границе этих шаров.

б) Покажите, что результат связной суммы может зависеть от выбора ориентации склеивающего отображения (например, для $M = M' = \mathbb{CP}^2$), но для связных замкнутых 2-многообразий — не зависит.