Избранные сюжеты из топологии поверхностей

Задачи к лекции 2:
Трюк Кирби

19 сентября 2024

Задача 1. Докажите, что n-мерный тор с выкинутой точкой можно погрузить в $\mathbb{R}^n$.

Задача 2. Покажите, что свободная группа с любым не более чем счётным числом образующих вкладывается в свободную группу с двумя образующими.

Задача 3. Пусть $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset X$ — последовательность компактов, объединение которых даёт X, причём для любого компакта $K \subset X$ имеем $K_i \supset K$ при некотором i. Напомним, *множество концов* $\mathrm{Ends}(X)$ определяется как предел диаграммы

$$\pi_0(X \setminus K_1) \leftarrow \pi_0(X \setminus K_2) \leftarrow \pi_0(X \setminus K_3) \leftarrow \ldots$$

а) Покажите, что $\mathrm{Ends}(X)$ с точностью до гомеоморфизма не зависит от выбора последовательности $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$

б) Проверьте, что собственное отображение $X \to Y$ индуцирует непрерывное отображение $\mathrm{Ends}(X) \to \mathrm{Ends}(Y)$.

в) Докажите, что если X — связное многообразие, то $\mathrm{Ends}(X)$ компактно и имеет счётную базу.

Задача 4. Пусть дан граф Γ, такой что $\pi_1(\Gamma)$ конечно порождена, а множество концов $\mathrm{Ends}(\Gamma)$ состоит из одной точки. Докажите, что в Γ можно выделить луч $l \subset \Gamma$, такой что рёбра, не входящие в l, образуют некоторый конечный подграф Γ' и не более чем счётное объединение конечных деревьев, не связанные между собой.