

Избранные сюжеты из топологии поверхностей
Задачи к лекции 5:
Теорема о факторизации и её следствия
10 октября 2024

Задача 1. а) Докажите, что любую чётную перестановку из \mathfrak{S}_d можно представить в виде коммутатора перестановок, транзитивно действующих на $\{1, \dots, d\}$.

б) Докажите, что произведение перестановок на ab элементах, имеющих цикловой тип $\langle a, a, \dots, a \rangle$, $\langle b+1, 1, \dots, 1 \rangle$ и $\langle a, a(b-1) \rangle$ и транзитивно действующих на $\{1, 2, \dots, ab\}$, не может быть тождественной перестановкой.

в)* Для каких данных ветвления в замкнутой неориентируемой поверхности существует соответствующее им связное разветвлённое накрытие?

Задача 2. Верно ли, что если геометрическая степень отображения замкнутых поверхностей равно нулю, то это отображение нульгомотопно?

Задача 3. а) Покажите, что (возможно, разветвлённое) накрытие замкнутых поверхностей сохраняет локальную ориентацию.

б) Выведите, что геометрическая степень разветвлённого накрытия равна числу его листов.

Задача 4. Пусть $f_1 : M \rightarrow M'$ и $f_2 : M' \rightarrow N$ — отображения замкнутых поверхностей, причём f_2 — накрытие (неразветвлённое). Покажите, что $\text{Deg}(f_2 \circ f_1) = \text{Deg}(f_1) \cdot \text{Deg}(f_2)$.