

Избранные сюжеты из топологии поверхностей
Задачи к лекции 8:
Локальные системы
и (ко)гомологии с локальными коэффициентами
7 ноября 2024

Задача 1. Докажите, что гомологии связного CW -комплекса X с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ (с естественным действием $\pi_1(X)$) изоморфны гомологиям универсального накрывающего \tilde{X} .

Задача 2. Сколько на n -мерном торе $(S^1)^n$ существует локальных система со слоем \mathbb{Z} с точностью до а) изоморфизма; б) гомеоморфизма тора? в)* Вычислите их гомологии.

Задача 3. Постройте клеточный комплекс и вычислите гомологии и когомологии для
а) ленты Мёбиуса с коэффициентами в ориентирующей локальной системе (со слоем \mathbb{Z});
б) $\mathbb{R}P^n$ с коэффициентами в нетривиальной локальной системе со слоем \mathbb{Z} ;

Задача 4. Дана поверхность S . Докажите, что любая локальная система L на S со слоем \mathbb{Z} изоморфна обратному образу ориентирующей локальной системы над $\mathbb{R}P^2$ при некотором отображении $S \rightarrow \mathbb{R}P^2$ (другими словами, что существует $f : S \rightarrow \mathbb{R}P^2$, такое что $L \simeq f^*(\tilde{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}P^2})$).

Задача 5. Вычислите гомологии и когомологии сферы с g ручками с коэффициентами в нетривиальной локальной системе со слоем \mathbb{Z} (найдите все варианты ответа и докажите что других нет).