

Избранные сюжеты из топологии поверхностей

Задачи к лекции 9:

Характеристические классы

14 ноября 2024

Задача 1. Пусть M — связное компактное многообразие с краем.

а) Покажите, что на M можно построить всюду ненулевое векторное поле.

б) Построим векторное поле, равное на ∂M полю внутренних нормалей. Покажите, что сумма индексов его нулей внутри M равна $\chi(M) - \chi(\partial M)$.

в)* Построим векторное поле, равное на ∂M полю внешних нормалей. Покажите, что сумма индексов его нулей внутри M равна $\chi(M)$.

Задача 2. а) Покажите, что множество локальных систем над пространством X со слоем \mathbb{Z} , снабжённое операцией тензорного произведения, изоморфно¹ группе $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$.

б) Покажите, что w_1 задаёт аналогичное соответствие для множества одномерных вещественных расслоений.

Задача 3. Для каких n все классы Штифеля-Уитни $\mathbb{R}P^n$ тривиальны?

Задача 4. а) Опишите с точностью до изоморфизма все расслоения ранга 2 над S^2 .

б)* Сколько существует неориентируемых расслоений ранга 2 над двумерным тором?

¹Несложно показать естественность этого изоморфизма.