

Избранные сюжеты из топологии поверхностей  
Задачи к лекции 11:  
Теоремы Смейла-Хирша и Элиашберга  
28 ноября 2024

**Задача 1.** Покажите, что касательное расслоение связной компактной ориентируемой поверхности с краем тривиально.

**Задача 2.** Существует ли погружение  $\mathbb{R}P^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$ ?

**Задача 3.** Напомним, усиленная версия теоремы Смейла-Хирша утверждает, что при  $\dim M < \dim N$  отображение  $\text{Imm}(M, N) \xrightarrow{d} \text{Mon}(TM, TN)$  является слабой эквивалентностью. Выведите из неё теорему о выворачивании сферы: стандартное вложение  $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  и вложение  $-i$  гомотопны в классе погружений.

**Задача 4.** а) Докажите, что отображение<sup>1</sup> степени 1 из тора в сферу  $T^2 \rightarrow S^2$  гомотопно отображению с одной складкой.<sup>2</sup> б) Постройте такое отображение явно.

**Задача 5.** Постройте отображение  $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , имеющее одну сборку и одну складку.

---

<sup>1</sup>Можно показать, что с точностью до гомотопии отображение степени 1 единственно.

<sup>2</sup>Подсказка: на торе есть всего две простых замкнутых кривых с точностью до гомеоморфизма тора. Какая из них может быть складкой отображения в сферу?