

Избранные сюжеты из топологии поверхностей

Задачи к лекции 12:

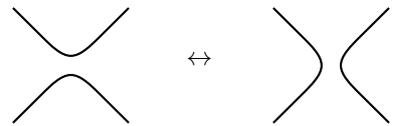
Характеристические классы расслоений ранга 2

5 декабря 2024

Задача 1. (Принимается до 12 декабря, 17:29.) Пусть $C \subset S$ — замкнутое одномерное подмногообразие в замкнутой поверхности. Обозначим через $[C]$ его двойственный класс в $H^1(S; \mathbb{Z}_2)$. Докажите, что $[C] = 0$ если и только если $S \setminus C$ допускает шахматную раскраску (т. е. разбиение на два открытых множества M_+ и M_- , таких что $\partial \overline{M_+} = \partial \overline{M_-} = C$).

Задача 2. Рассмотрим множество замкнутых одномерных подмногообразий поверхности S с точностью до изотопии и следующих операций:

- хирургия Морса как на рисунке справа
- удаление/добавление кривой, ограничивающей диск.



Докажите, что множество классов эквивалентности естественно отождествляется с $H_1(S; \mathbb{Z}_2)$.

Задача 3. а) Вычислите π_1 , π_2 и π_3 для грассманиана $Gr(3, \mathbb{R}^\infty)$.

б) Докажите, что для любого векторного расслоения E ранга 3 найдётся расслоение L ранга 1 (над той же базой), такое что $w_1(E \otimes L) = 0$ (или, другими словами, такое что слои расслоения $E \otimes L$ допускают глобальный выбор ориентации).

в) Определим *ориентированный грассманиан* $Gr^+(3, \mathbb{R}^\infty)$ как множество ориентированных трёхмерных подпространств в \mathbb{R}^∞ . Вычислите¹ его π_1 , π_2 и π_3 .

г) Докажите, что расслоения ранга 3 над трёхмерным CW -комплексом изоморфны если и только если их классы w_1 и w_2 равны.

¹Можно воспользоваться точной последовательностью расслоения $SO(3) \rightarrow V(3, \mathbb{R}^\infty) \rightarrow Gr^+(3, \mathbb{R}^\infty)$ или двулистным накрытием $Gr^+(3, \mathbb{R}^\infty) \rightarrow Gr(3, \mathbb{R}^\infty)$.