Введение в современную математику

Заключительный тест

21 октября 2025

Решения должны быть полностью обоснованы, ответ без объяснения не учитывается. Если вы используете факт, который считаете общеизвестным (например теорему из курса), этот факт необходимо явно сформулировать, но доказывать не нужно.

Задача 1. Постройте отрицания к следующим утверждениям (обоснование не требуется):

• для любого $C > 0$ найдётся K, такое что если $n > K$, то $|x_n| > C$;

• если ξ невырождена и v, w линейно независимы, то $\xi(v, w) \neq 0$;

• если диффеоморфизм S не псевдоаносовский, то он приводимый или имеет конечный порядок.

Задача 2. Для подмножеств $A, B \subset \mathbb{N}$ скажем, что $A \leftrightsquigarrow B$, если пересечение $A \cap B$ бесконечно. Является ли $\leftrightsquigarrow$ отношением эквивалентности на множестве $2^{\mathbb{N}}$?

Задача 3. Дано отображение множеств $f : X \to Y$ и подмножества $A_1, A_2 \subset X$ и $B_1, B_2 \subset Y$.

а) Предположим, $f(A_1) \subset f(A_2)$. Верно ли, что $A_1 \subset A_2$?

б) Предположим, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Верно ли, что $B_1 \subset B_2$?

Задача 4. Какую мощность имеет множество таких отображений $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, у которых образ состоит лишь из конечного числа элементов?

Задача 5. Докажите, что сумма $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots$ является числом Фибоначчи.

Задача 6. Сколькими способами можно разбить 2026 школьников на пары? Помимо обоснования, требуется записать ответ формулой без многоточия.

Задача 7. Найдите $(1 + i)^{2025}$.

Задача 8. а) Найдите сумму корней уравнения $z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$.

б) Нарисуйте, как расположены эти корни.

Задача 9. Определите количество инверсных пар и чётность следующей перестановки $f \in \mathfrak{S}_n$:

а) $f(i) = i + 2 \pmod{n}$;

б) $f(i) = n + 1 - i$.

Задача 10. Шифр заменяет каждую из 33 букв русского алфавита на некоторую другую (разные заменяются на разные). Нам дали зашифрованное сообщение. Найдите какое-нибудь N, такое что после применения шифра N раз к зашифрованному сообщению мы получим исходное сообщение.