

Введение в современную математику
Вступительный тест
2 сентября 2025

Тем, кто успешно справится с тестированием, получают зачёт по курсу автоматом. Решения должны быть полностью обоснованы, ответ без объяснения не учитывается. Если вы используете факт, который считаете общеизвестным, этот факт необходимо явно сформулировать, но доказывать не нужно.

Задача 1. Постройте отрицания к следующим утверждениям (обоснование не требуется):

- Каждый день Маша съедает по семь конфет и выпивает не меньше литра квасу.
- Если ты долго смотришь в бездну, то бездна тоже смотрит в тебя.
- Каждое блюдо в этом заведении или пересолено, или не пересолено, но переперчено, или не пересолено и не переперчено, но подгорело.

Задача 2. Переведите 73 из восьмеричной в двоичную систему исчисления.

Задача 3. Про отображение $f : X \rightarrow Y$ известно, что существует такое $h : Y \rightarrow X$, что $h(f(x)) = x$ для любого $x \in X$. Можно ли утверждать, что **а)** f инъективно; **б)** f сюръективно?

Задача 4. Докажите, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

Задача 5. а) Сколько существует слов длины 10, состоящих только из букв a, b и не содержащих в записи двух букв b подряд.

б) Сколько существует слов длины 10, состоящих только из букв a, b, c и содержащих ровно 4 буквы a ?

Задача 6. Найдите формулу коэффициента для монома x^{50} в выражении $(1 + 3x)^{179}$ после раскрытия скобок и приведения подобных.

Задача 7. Выразите $\cos 7\alpha$ через $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

Задача 8. Найдите все $z \in \mathbb{C}$, такие что $z + 3\bar{z} = 8 + 6i$.

Задача 9. Существует ли такое множество P , что множество всех подмножеств P равномощно $\mathbb{N}$?

Задача 10. Покажите, что для любого $n > 2$ существуют две перестановки на n элементах, через которые выражается любая другая перестановка (т. е. является их произведением в каком-то количестве и порядке).