Введение в группы классов отображений

Экзамен (первая попытка)

26 мая 2024

Задача 1. а) Сколько на поверхности рода 7 существует различных ориентированных простых замкнутых кривых с точностью[1] до гомеоморфизма?

б) На S_7 отмечен набор непересекающихся простых замкнутых кривых, разбивающих S_7 на штаны. Сколько кривых может быть отмечено и сколько штанов могло получиться?

Задача 2. Докажите, что четырёхугольники в $\mathbb{H}^2$, все вершины которых лежат на абсолюте, имеют одинаковую площадь.

Задача 3. Верно ли, что если произведение двух параболических изометрий $\mathbb{H}^2$ является параболическим, то они имеют одинаковую неподвижную точку на $\partial\mathbb{H}^2$?

Задача 4. Верен ли аналог критерия двуугольника для самопересечения: замкнутая кривая α имеет минимально возможное число точек самопересечения (среди всевозможных кривых того же гомотопического класса), если и только если $S \setminus \alpha$ не содержит одно- и двуугольников?

Задача 5. Постройте заполняющий набор из двух кривых[2] на поверхности рода 3.

Задача 6. Пусть a, b — классы простых замкнутых кривых, такие что $i(a,b) = 1$. Докажите, что для T_a^2 и T_b выполнено соотношение $T_a^2 T_b T_a^2 T_b = T_b T_a^2 T_b T_a^2$.

[1] Буквально это означает, что кривые $\alpha, \alpha' \subset S_7$ мы считаем одинаковыми, если существует гомеоморфизм $S_7 \to S_7$, переводящий α в α' с сохранением ориентации.

[2] Т. е. пару простых замкнутых кривых в минимальном положении, разрезающую поверхность на диски.