Введение в группы классов отображений

Задачи к лекции 1: Поверхности и гомеоморфизмы

14 февраля 2024

Поверхность — компактное связное 2-многообразие. *Замкнутая* = компактная без края.

Задача 1. Докажите, что *связность* и *линейная связность* для топологических многообразий эквивалентны.

Задача 2. Определим *триангулированное 2-многообразие* как конечное число треугольников, склеенных таким образом, что

- любые два треугольника либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону, либо не пересекаются;
- для любой вершины можно циклически упорядочить примыкающие к ней треугольники так, что соседние (относительно этого порядка) треугольники будут иметь общее ребро, а несоседние не будут.

Покажите, что триангулированное 2-многообразие является топологическим 2-многообразием,[1] то есть что оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^2$.

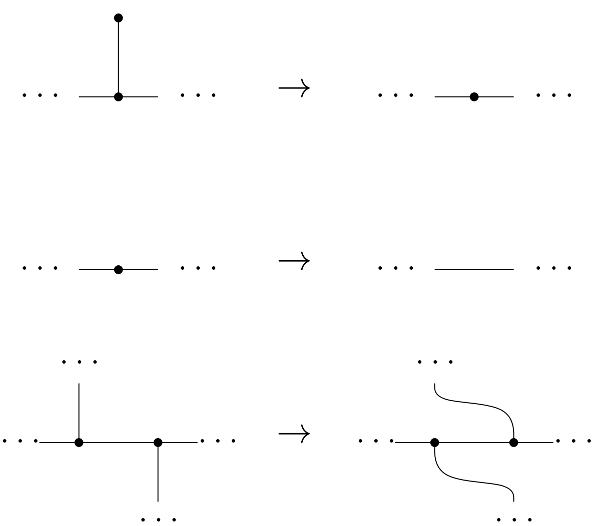
Задача 3. Стороны 8-угольника можно разбить на пары и склеить $8!/(2^4 \cdot 4!) = 105$ способами, получив замкнутую ориентируемую поверхность. Сколько из них дают поверхность какого рода?

Замкнутая кривая на поверхности S — любое отображение $\alpha : S^1 \to S$. Кривая называется *простой* (или *несамопересекающейся*), если это отображение инъективно. Набор попарно непересекающихся простых замкнутых кривых обычно называют *мультикривая*.

Задача 4. Дана замкнутая поверхность S рода g. Сколько на S существует простых замкнутых кривых, различных с точностью до гомеоморфизма $S \to S$? Как изменится ответ, если считать кривые *ориентированными*.

Задача 5. Предположим, мультикривая из m компонент разбивает замкнутую поверхность рода g на p *штанов*, то есть частей, гомеоморфных сфере с тремя вырезанными дисками.
а) Докажите, что $p = 2g - 2$. **б)** Выразите m через g.

Задача 6. Пусть мультикривая μ разбивает замкнутую поверхность S на диски, цилиндры и штаны. Рассмотрим граф G, двойственный к μ.



а) Докажите, что G имеет конечное число вершин и рёбер.

б) Докажите, что если G — дерево, то $S \simeq S^2$.

в) Докажите, что при заменах в графе, изображённых справа, соответствующая поверхность заменяется на гомеоморфную.

г) Выведите, что S гомеоморфна связной сумме торов.

[1] Добавив условие связности, мы получим то, что мы называем «замкнутая поверхность». Если же нарушить условие конечности числа треугольников, получится некомпактная поверхность без края (возможно, бесконечного типа). А как именно усовершенствовать определение, чтобы оно давало и поверхности с краем?