Введение в группы классов отображений

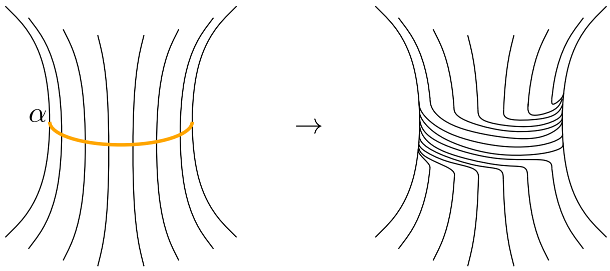
Задачи к лекции 3: Отображения и их классы

28 февраля 2024

Напоминание: $S^b_{g,n}$ — поверхность рода g с n поколами и b компонентами края.

Задача 1. Докажите, что элементы $f, f' \in \mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)$ изотопны если и только если $f = h \circ f'$ для некоторого $h \in \mathrm{Homeo}_0(S, \partial S)$.

Пусть дана простая замкнутая кривая $\alpha \subset S$. Определим *скручивание Дена* $T_\alpha : S \to S$ как следующий неподвижный вне окрестности α гомеоморфизм:



Задача 2. Пусть $\alpha, \beta \subset S_1$ — параллель и меридиан тора.

а) Докажите, что классы T_α и T_β порождают $\mathrm{Mod}(S_1)$.

б) Докажите соотношение $(T_\beta T_\alpha)^6 = 1$.

~~**в)*** Докажите, что это единственное соотношение в $\mathrm{Mod}(S_1)$.~~

Задача 3. Приведите пример элемента $f \in \mathrm{Mod}(S_g)$, имеющего **а)** порядок g; **б)** порядок $2g$; **в)** порядок $2g+1$.

Задача 4. Про отображение $F : S \times [0;1] \to S$ известно, что оно непрерывно на каждом слое $S \times t$ и на каждом отрезке $x \times [0;1]$ (для любых $x \in S$ и $t \in [0;1]$). Верно ли, что F непрерывно?

Задача 5. а) Пусть S компактна. Введём на ней метрику d. Она определяет метрику $\tilde{d}$ на $\mathrm{Homeo}(S)$ по правилу

$$\tilde{d}(f_1, f_2) := \sup_{x \in S} d(f_1(x), f_2(x)).$$

Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathrm{Homeo}(S)$ совпадает с топологией, задаваемой $\tilde{d}$.

б) Покажите, что для некомпактного S это не так[1].

Задача 6. а) Покажите, что топологическая группа $\mathrm{Homeo}_0(S^1_0, \partial S^1_0)$ стягиваема.

б) Покажите, что $\mathrm{Homeo}_0(S_0)$, $\mathrm{Homeo}_0(S^1_0)$ и $\mathrm{Homeo}_0(S_1)$ не стягиваемы.

[1] Более того, можно показать, что компактно-открытая топология не порождается вообще никакой метрикой на $\mathrm{Homeo}(S)$.