Введение в группы классов отображений

Задачи к лекции 4: Накрытия и плоскость Лобачевского

6 марта 2024

Задача 1. а) Приведите пример композиции накрытий, не являющейся накрытием[1].

б) Докажите, что если X линейно связен и локально односвязен, $E \to X$ накрытие и композиция $E' \to E \to X$ накрытие, то $E' \to E$ тоже накрытие.

По умолчанию через $\mathbb{H}^2$ обозначается[2] множество точек верхней полуплоскости $(x, y),\ y > 0$, снабжённое римановой метрикой $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Геодезической в $\mathbb{H}^2$ называется дуга окружности или отрезок прямой, перпендикулярных абсолюту $y = 0$. *Отражение* относительно геодезической определяется как соответствующая инверсия или симметрия.

Задача 2. Покажите, что отражения являются изометриями $\mathbb{H}^2$.

Задача 3. Покажите, что группа преобразований $\mathbb{H}^2$, порождённая отражениями,

а) транзитивно действует на $\mathbb{H}^2$;

б) транзитивно действует на флагах “точка $\in$ луч прямой $\subset$ полуплоскость” в $\mathbb{H}^2$;

в) совпадает с $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$.

Задача 4. Проверьте, что инверсия с центром $(0, -1)$ и радиусом $\sqrt{2}$ отождествляет $\mathbb{H}^2$ и модель Пуанкаре в круге $x^2+y^2 < 1$, где метрика задаётся квадратичной формой $\dfrac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$.

Задача 5. Сопоставим элементу $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$ преобразование $z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$.

а) Проверьте, что это изометрия $\mathbb{H}^2$ в комплексных координатах.

б) Докажите, что это соответствие задаёт гомоморфизм групп $PSL(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

в) Докажите, что он является изоморфизмом.

Задача 6. Покажите, что если поверхность S не замкнута (имеет край или проколы), то на S можно ввести плоскую метрику (кривизны 0).

---

[1] Указание: *пространства должны быть локально неодносвязными.*

[2] То есть, мы говорим не просто о плоскости Лобачевского, а о модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.