Введение в группы классов отображений
Задачи к лекции 5: Движения в геометрии Лобачевского
13 марта 2024

По умолчанию геодезические рассматриваются с *натуральной параметризацией*, то есть их вектор скорости имеет единичную длину.

Задача 1. Докажите, что длина любой геодезической в $\mathbb{H}^2$ бесконечна.

Таким образом, любой отрезок геодезической можно [единственным образом] продолжить до геодезической $\mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$. Такие геодезические мы называем *полными* (и по умолчанию рассматриваются только они).

Задача 2. Напомним, геодезические $\alpha, \alpha' : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ называются *эквивалентными*, если существует $C > 0$, такое что $d(\alpha(t), \alpha'(t)) < C$ при всех достаточно больших t.

а) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и что при изометриях $\mathbb{H}^2$ эквивалентные геодезические переходят в эквивалентные геодезические.

б) Покажите, что на α и α' можно выбрать параметризацию, такую что $\lim\limits_{t\to 0} d(\alpha(t), \alpha'(t)) = 0$.

Задача 3. Обозначим через $L_{par}(\mathbb{H}^2)$ множество всех геодезических с натуральной параметризацией, снабжённое компактно-открытой топологией, и через $L_{or}(\mathbb{H}^2)$ множество всех ориентированных геодезических без учёта параметризации.

а) Рассмотрим отображение $L_{par}(\mathbb{H}^2) \to \partial\mathbb{H}^2$, переводящее геодезическую в её класс эквивалентности. Докажите, что $\partial\mathbb{H}^2$, снабжённое образом топологии $L_{par}(\mathbb{H}^2)$, гомеоморфно окружности.

б) Рассмотрим образ топологии $L_{par}(\mathbb{H}^2)$ при забывающем отображении $L_{par}(\mathbb{H}^2) \to L_{or}(\mathbb{H}^2)$. Введите на $L_{or}(\mathbb{H}^2)$ естественную[1] метрику, задающую на нём такую же топологию.

в) Опишите $L_{par}(\mathbb{H}^2)$ и $L_{or}(\mathbb{H}^2)$ с точностью до гомеоморфизма.

Задача 4. Проверьте, что матрица из $PSL(2,\mathbb{R})$ задаёт эллиптический, параболический и гиперболический элемент $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ если и только если модуль её следа < 2, $= 2$ и > 2 соответственно.

Задача 5. Проверьте, композиция отражений относительно геодезических α и β равно эллиптическому, параболическому и гиперболическому элементу $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ если и только если α и β пересекаются внутри $\mathbb{H}^2$, пересекаются на $\partial\mathbb{H}^2$ и не пересекаются соответственно.

Задача 6. (*Теорема о трёх гвоздях*) Докажите, что изометрия $\mathbb{H}^2$ однозначно определяется образами трёх точек, не лежащих на одной геодезической.[2]

Задача 7. Проверьте, что элементы $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ коммутируют если и только если они имеют одинаковое множество неподвижных точек в $\overline{\mathbb{H}^2}$.

[1] Желательно, чтобы эта метрика сохранялась при действии $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ на $L_{or}(\mathbb{H}^2)$.

[2] Можно рассмотреть случаи, когда одна, две или три из этих точек лежат на $\partial\mathbb{H}^2$.