

Введение в группы классов отображений

Задачи к лекции 6:

Гиперболические поверхности

27 марта 2024

Задача 1. Приведите пример не дискретного свободного действия счётной группы на многообразии (и убедитесь, что отображение факторизации не является накрытием).

Задача 2. а) Покажите, что треугольники в \mathbb{H}^2 , все вершины которых лежат на абсолюте, попарно равны.

б) Конечны ли их периметры и площади?

в) Верен ли аналог пункта а) для четырёхугольников? пятиугольников?

Задача 3. Пусть гиперболическая поверхность S без края склеена из многоугольника в \mathbb{H}^2 .

а) Покажите, что для каждой пары склеиваемых сторон существует единственный элемент $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, переводящий первую сторону во вторую с ориентацией как в схеме склейки.

б) Проверьте, что группа $G \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, порождённая этими элементами, изоморфна $\pi_1(S)$.

в) Докажите, что действие G на \mathbb{H}^2 свободно и дискретно.

Задача 4. Докажите, что для гиперболического движения $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ найдётся $C > 0$, такое что $d(x, f(x)) > C$ для любого $x \in \mathbb{H}^2$.

Задача 5. а) Выпишите элементы $PSL(2, \mathbb{Z})$, порождающие подгруппу, которая свободно дискретно действует на \mathbb{H}^2 и фактор по ней является $S_{0,3}$ с гиперболической¹ метрикой.

б*) Докажите, что подгруппа $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ с таким свойством единственна с точностью до сопряжения.

Задача 6. Для каких простых замкнутых кривых на поверхности в их классе гомотопии есть геодезическая?

¹полной, кривизны -1 и конечного объёма