

Кусочно-линейные многообразия и маломерная топология

Задачи к лекции 1:

Топологические и гладкие многообразия

11 сентября 2025

Задача 1. Постройте диффеоморфизм между $\mathbb{R}^n$ и шаром $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$. Выведите, что любое открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ является n -мерным многообразием.

Задача 2. Введите топологию¹ на множестве прямых на плоскости (не обязательно проходящих через ноль) и покажите, что оно гомеоморфно ленте Мёбиуса.

Задача 3. а) Задайте на проективном пространстве $\mathbb{RP}^n$ атлас и выпишите явно функции перехода.

б) Опишите какие-нибудь локальные координаты в окрестности произвольной точки грассманиана $Gr(k, \mathbb{R}^d)$.

в)* Задайте на $Gr(k, \mathbb{R}^d)$ атлас и выпишите явно функции перехода.

Задача 4. Пусть M — гладкое многообразие размерности n . Покажите, что касательное расслоение TM является гладким² многообразием размерности $2n$.

Задача 5*. Предположим, конечная группа G действует на гладком многообразии M , причём это действие *гладко* (т.е. каждому элементу $g \in G$ соответствует диффеоморфизм $M \rightarrow M$) и *свободно* (т.е. без неподвижных точек). Покажите, что фактор M/G является гладким многообразием.

¹Хочется, чтобы эта топология была “естественной”, то есть адекватно отражала, какие прямые являются “близкими”.

²Пусть M имеет класс гладкости C^r . Какой класс гладкости имеет TM ?