

Кусочно-линейные многообразия и маломерная топология

Задачи к лекции 3:

Поверхности и связные суммы

25 сентября 2025

Задача 1. а) Докажите, что $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \setminus \{y_1, y_2, y_3\}$ для любых различных x_1, x_2, x_3 и $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{S}^2$.

б) В сфере $\mathbb{S}^2$ вырезали m круглых дырок (непересекающихся сферических сегментов; граница дырки не вырезается). Докажите, что результат с точностью до гомеоморфизма не зависит от расположения и радиусов дырок.

Задача 2. Покажите, что если сферу с тремя дырками и тор с одной дыркой умножить на отрезок, то полученные пространства будут гомеоморфны.

Задача 3. Докажите, что любой связный ленточный граф гомеоморфен поверхности рода $g \geq 0$ либо неориентируемой поверхности рода $n > 0$ с несколькими дырками.

Задача 4. Покажите, что связная сумма поверхности рода $g \geq 0$ с неориентируемой поверхностью рода $n > 0$ гомеоморфна некоторой неориентируемой поверхности рода m . Выразите m через g и n .

Задача 5*. а) Покажите, что связная сумма (связных ориентированных) многообразий $M_1 \# M_2$ может зависеть от выбора ориентации.

б) Покажите, что в размерности 1 и 2 таких примеров нет, а в размерности 3 уже есть.