Кусочно-линейные многообразия и маломерная топология

Задачи к лекции 5: PL-аппроксимации

9 октября 2025

Ниже все триангуляции по умолчанию считаются *линейными*.

Задача 1. Пусть невырожденный выпуклый полиэдр $P \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением набора полупространств $H_1, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что существует единственный минимальный по включению поднабор $H_{i_1}, \dots, H_{i_{k'}}$, чьё пересечение совпадает с P, и при этом каждая $(n-1)$-мерная грань P есть пересечение $P \cap \partial H_{i_j}$ для некоторого $j = 1, \dots, k'$.

Задача 2. Пусть для невырожденного выпуклого полиэдра $P \subset \mathbb{R}^n$ заданы триангуляции граней, причём они не имеют новых вершин (отличных от 0-мерных граней самого P). Обязательно ли эта триангуляция ∂P продолжается до триангуляции всего P?

Задача 3. Пусть задана триангуляция открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ с множеством вершин V.

а) Докажите, что для любой вершины $v_0 \in V$ существует $\varepsilon > 0$, такое что если сдвинуть v_0 на расстояние, не превышающее ε, то снова получится линейная триангуляция U.

б) Докажите, что существует непрерывная функция $\varepsilon : U \to \mathbb{R}_{>0}$, такая что если сдвинуть каждую вершину $v \in V$ на расстояние, не превышающее $\varepsilon(v)$, то снова получится линейная триангуляция U.

Задача 4. Дана триангуляция K подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$.

а) Предположим, X компактен. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует k, такое что в k-кратном барицентрическом подразбиении K диаметр любого симплекса меньше ε.

б) Докажите, что для любой непрерывной функции $\varepsilon : X \to \mathbb{R}_{>0}$ существует ε-малое измельчение K (т. е. диаметр каждого симплекса меньше всех значений функции на нём).