Кусочно-линейные многообразия и маломерная топология

Экзамен

18 декабря 2025

Задача 1. Является ли подмножество $\mathbb{R}^4$, заданное уравнением $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$ топологическим подмногообразием?

Задача 2. а) Докажите, что для графа Γ существует непрерывное вложение в $\mathbb{R}^2$ если и только если существует кусочно-линейное вложение $\Gamma \to \mathbb{R}^2$. Такие графы называются *планарными*.

б) Пусть $P \subset \mathbb{R}^4$ — трёхмерный симплициальный комплекс (линейно триангулированное подмножество). Верно ли, что линк любого ребра P является планарным графом?

Задача 3. Как может выглядеть образ аффинного отображения **а)** $\Delta^4 \to \mathbb{R}^2$; **б)** $\Delta^4 \to \mathbb{R}^3$? (Опишите все варианты явно и докажите что других нет.)

Задача 4. Покажите, что любое вложение $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$, образ которого является гладким подмногообразием в окрестности одной точки, непрерывно изотопно стандартному вложению.

Задача 5. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компактное триангулированное подмножество, X' — его барицентрическое подразбиение. Найдите такое $c > 1$, что максимальный диаметр симплекса в X' хотя бы в c раз меньше максимального диаметра симплекса в X, для **а)** $n = 2$; **б)** произвольного n.

Задача 6. *Конусом* в $\mathbb{R}^n$ называется объединение лучей с общим началом x_0, проходящих через все точки некоторого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, не содержащего x_0. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *локально коническим*, если для любого $x_0 \in X$ существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, такая что $X \cap U = C \cap U$ для некоторого конуса $C \subset \mathbb{R}^n$ с вершиной x_0.

Покажите что **а)** пересечение и объединение двух локально конических множеств является локально коническим. **б)** Проверьте что произведение локально конического множества в $\mathbb{R}^m$ на локально коническое множество в $\mathbb{R}^n$ является локально коническим множеством в $\mathbb{R}^{m+n}$.

в) Докажите, что любой вложенный симплициальный комплекс в $\mathbb{R}^n$ — локально конический.

г) Докажите обратное: любое локально коническое подмножество $\mathbb{R}^n$ является вложенным симплициальным комплексом, для $n = 2$; **д)** для произвольного n.