

# Топология трёхмерных многообразий

## Задачи к лекции 1:

### Разбиение Хегора

9 февраля 2023

Во всех задачах ниже,  $M$  — замкнутое ориентируемое связное 3-многообразие.

**Задача 1.** Предположим,  $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$ . Вычислите  $H_\bullet(M; \mathbb{Z})$  и  $H^\bullet(M; \mathbb{Z})$ .

**Задача 2.** Дано разбиение Хегора  $M = M_1 \cup M_2$ , где  $\partial M_1 = \partial M_2 = S$ . Выразите  $\pi_1(M)$  через  $\pi_1(M_1)$ ,  $\pi_1(M_2)$  и  $\pi_1(S)$ .

**Задача 3.** Неориентируемое тело с ручками получается как шар  $D^3$ , к границе которого приклеены основаниями несколько цилиндров  $D^2 \times [0; 1]$  (называемых ручками), и у некоторых цилиндров основания приклеены с противоположной ориентацией (эти ручки называются неориентированными).

а) Докажите, что тело с  $g$  неориентированными ручками гомеоморфно телу с  $k$  неориентированными и  $g - k$  ориентированными ручками для любого  $k = 1, \dots, g$ .

б) Пусть  $N$  замкнутое связное неориентируемое 3-многообразие. Докажите, что его можно разбить на два неориентируемых тела с ручками.

**Задача 4.** Пусть при разбиении Хегора  $M = M_1 \cup M_2$  меридианы ручек  $M_1$  приклеиваются к параллелям ручек  $M_2$ . Докажите, что  $M$  гомотопически эквивалентно сфере  $S^3$ .

**Задача 5.** Приведите пример замкнутого ориентируемого связного 3-многообразия, не допускающего разбиения Хегора а) на два полнотория б\*) на два тела с 10 или менее ручками.