

Топология трёхмерных многообразий
Задачи к лекции 3:
Вырезание и вклейка полноториев
2 марта 2023

Задача 1. На полнотории в \mathbb{R}^3 нарисован торический узел (p, q) , т. е. простая замкнутая кривая, q раз проходящая вдоль параллели и p раз вдоль меридиана, где p и q взаимно просты. Докажите, что существует гомеоморфизм полнотория в себя, переводящий этот узел в торический узел (p', q') , если и только если $q' = q$ и $p \equiv p' \pmod{q}$.

Задача 2. а) Для тела с ручками M будем называть *меридианом* простую замкнутую ненульгомологичную кривую в ∂M , стягиваемую в M . Докажите, что любой меридиан ограничивает вложенный в M диск.

б) Выделим в теле с ручками M набор непересекающихся меридианов. Докажите, что они стягиваются в M набором вложенных непересекающихся дисков.

в) Докажите, что для любых двух наборов из g попарно негомотопных меридианов существует гомеоморфизм $M \rightarrow M$, переводящий один во второй (т. е., в частности, любые g меридианов можно перевести в меридианы различных ручек).

г*) Пусть $g \geq 2$. Приведите пример простой замкнутой кривой в ∂M , нульгомологичной в M , но нестягиваемой в M .

Задача 3. Отметим у тела с ручками M меридианы двух разных ручек. Покажите, что существует гомеоморфизм $M \rightarrow M$, меняющий эти меридианы местами (причём с любой наперёд заданной ориентацией).

Задача 4. Пусть $M_1 \cup_{S_g} M_2$ — разбиение Хегора. Отметим на S_g набор меридианов ручек M_1 и набор меридианов ручек M_2 . Полученный набор $g + g$ кривых называется *диаграммой Хегора*. Докажите, что результат склейки тел с ручками определяется диаграммой Хегора однозначно с точностью до гомеоморфизма.