

Топология трёхмерных многообразий

Задачи к лекции 4:

Линзовые пространства

9 марта 2023

Задача 1. Выделим на границе полнотория $D^2 \times S^1$ параллель $\beta = 1 \times S^1$ и меридиан $\alpha = \partial D^2 \times 1$. Дана простая замкнутая кривая $\gamma \subset \partial D^2 \times S^1$, проходящая p раз вдоль параллели и q раз вдоль меридиана. Пусть $f : D^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1$ — гомеоморфизм, положим $f(\gamma)$ проходит p' раз вдоль параллели и q' раз вдоль меридиана.

- а) Докажите, что $p' = \pm p$.
- б) Докажите, что q' может принимать любые значения вида $pk \pm q$, $k \in \mathbb{Z}$, причём только их.
- в) Докажите, что p и q взаимно просты.

Задача 2. а) Докажите, что линзовые пространства допускают S^1 -действие, при котором лишь конечное число орбит имеет нетривиальный стабилизатор, причём конечный. (Такие многообразия называются *многообразиями Зейферта*.)

- б) Покажите, что на S^3 свободное S^1 -действие единственно с точностью до гомеоморфизма.
- в) Перечислите линзовые пространства, допускающие свободное S^1 -действие.