

Топология трёхмерных многообразий

Задачи к лекции 7:

Операции с ручками

6 апреля 2023

Задача 1. К краю многообразия W_{k-1} приклеена ручка $D^k \times D^{n-k}$ индекса k по отображению $\partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial W_{k-1}$.

а) Покажите, что при изотопии приклеивающего отображения полученное многообразие заменяется на диффеоморфное.

б) Покажите, что (с точностью до диффеоморфизма) можно считать, что образ “подошвы” $\partial D^k \times D^{n-k}$ лежит в сколь угодно малой окрестности “подошвенной сферы” $\partial D^k \times 0$.

в) Выведите, что ручки всегда можно переупорядочить по возрастанию размерности, а подошвы ручек одной размерности сделать непересекающимися.

г) Покажите, что после удаления сколь угодно малой трубчатой окрестности “опоясывающего диска” $0 \times D^{n-k}$ и сглаживания углов мы получим многообразие с краем, диффеоморфное W_{k-1} .

Задача 2*. Покажите, что если “подошвенная сфера” $\partial D^{k+1} \times 0$ ручки индекса $k+1$ трансверсально пересекает в одной точке “опоясывающую сферу” $0 \times \partial D^{n-k}$ ручки индекса k , то эту пару ручек можно удалить, не меняя многообразия с точностью до диффеоморфизма. (При этом нужно уточнить, как приклеиваются ручки старших индексов.)

Задача 3. а) Покажите, что с точностью до изоморфизма существует два расслоения над S^2 со слоем S^2 и структурной группой $O(3)$, причём оба они являются границами пятимерного шара с приклеенной ручкой индекса 2. Обозначим их B_1, B_2 .

б) Пусть $C \subset M$ — маленькая окружность в четырёхмерном многообразии. Докажите, что результат хирургии вдоль C (вырезания и вклейки трубчатой окрестности C) диффеоморфен $M \# B_1$ либо $M \# B_2$.