

Топология трёхмерных многообразий
Задачи к лекции 11:
Разложение на простые слагаемые
18 мая 2023

Задача 1. а) Сформулируйте и докажите теорему о единственности разложения замкнутых двумерных многообразий в виде суммы простых.

б) Имея коммутативный моноид, можно добавить к нему формальную операцию вычитания и, факторизуя по естественному (наименьшему) отношению эквивалентности, получить абелеву группу. Опишите эту группу для моноида замкнутых поверхностей. Инъективно ли отображение из множества поверхностей (с точностью до гомеоморфизма) в полученную группу?

Задача 2. Покажите, что если фундаментальная группа трёхмерного многообразия M циклическая, то M просто (неразложимо).

Задача 3. Приведите пример замкнутого неориентируемого трёхмерного многообразия, имеющего разные разложения на простые.

Задача 4. Пусть $p : M' \rightarrow M$ — накрытие, причём M' неприводимо. Тогда для любой вложенной сферы $S \subset M$ любая из компонент прообраза $p^{-1}(S)$ ограничивает шар $D \subset M'$. Может ли ограничение $p|_D$ не быть инъективным?

Задача 5. Докажите, что любое линзовое пространство $L(p, q)$ является простым.