Многообразия[1]

Бывают разные категории многообразий:

- топологические многообразия (хаусдорфово пространство со счётной базой, локально гомеоморфное $\mathbb{R}^n$ для фиксированного n);
- триангулированные многообразия (симплициальный комплекс, геометрическая реализация которого является топологическим многообразием; отношение эквивалентности порождается элементарными подразбиениями триангуляции);
- кусочно-линейные многообразия = PL-многообразия = комбинаторные триангуляции (линк каждого симплекса является комбинаторной триангуляцией сферы, таким образом комбинаторные триангуляции определяются индуктивно по n);
- гладкие многообразия (атлас с гладкими функциями перехода).

Любое гладкое многообразие допускает PL-структуру, единственную с точностью до комбинаторной эквивалентности (для C^1-многообразий это доказал Уитни [W], для C^r-многообразий см. приложение к [MS]). Остальные редукции снизу-вверх тривиальны. Как оказывается, никакие из обратных редукций в общем случае неверны.

Существуют топологические многообразия, не допускающие PL-структуры (в размерности 4, см. [F], и в размерности ≥ 5, см. [KS]). Более того, существуют вообще не триангулируемые топологические многообразия (в размерности 4 подходит то же многообразие E_8 из [F], для размерностей ≥ 5 это доказано в [Ma] совсем недавно). Также существуют топологические многообразия (например, $\mathbb{R}^4$), имеющие несколько комбинаторно неэквивалентных триангуляций.

В размерности ≥ 5 существуют триангулированные топологические многообразия, не допускающие комбинаторной триангуляции (и даже не гомотопически эквивалентные никакому PL-многообразию). Это следует из теоремы о двойной надстройке, см., например, [E]. В размерности ≤ 4 все триангуляции топологических многообразий являются комбинаторными.

Наконец, в размерности ≥ 7 PL-многообразие может иметь различные гладкие структуры [Mi], а в размерности ≥ 8 существуют PL-многообразия, не допускающие ни одной гладкой структуры [Ke]. Известно, что оценки на размерность точны.

Хорошая новость в том, что в размерности ≤ 3 между четырьмя приведёнными категориями многообразий нету подобных различий, чем в частности обеспечена относительная простота маломерной топологии.

Список литературы

[E] R. D. Edwards, *Suspensions of homology spheres*, preprint (1970)

[F] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom., 17 (1982), no. 3,357–453

[H] A. Hatcher, *The Kirby Torus Trick for Surfaces*, preprint (2013)

[Ke] M. A. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Commentarii Mathematici Helvetici, 34 (1960), 257–270

[KS] R. C. Kirby, L. C. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1977)

[L] J. Lurie, *Topics in Geometric Topology*, lecture notes (2009)

[Ma] C. Manolescu, Pin(2)*-equivariant Seiberg–Witten Floer homology and the Triangulation Conjecture*, J. Amer. Math. Soc., 29 (2016), 147–176

[Mi] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. 64 (1956), 399–40, есть перевод

[MS] Дж. Милнор, Дж. Сташеф. *Характеристические классы* (С приложением работы Дж. Манкрса *Элементарная дифференциальная топология*), М.: Мир, 1979

[W] J. H. C. Whitehead, *On C^1-complexes*, Ann. of Math., v. 41 (1940), pp. 809-82

[1] Если у вас есть замечания или добавления к этому короткому обзору, смело пишите мне на `ryabichev@179.ru`