

Топология – 1  
Экзамен (первая попытка)  
28 мая 2023

На экзамене разрешается использовать любые бумажные материалы, но нельзя пользоваться интернетом и общаться.

**Задача 1.** Рассмотрим  $\mathbb{R}$  с топологией правых лучей<sup>1</sup>. Найдите необходимое и достаточное условие на подмножество  $K \subset \mathbb{R}$ , при котором оно является компактным в этой топологии.

**Задача 2.** Для графика  $y = \sin \frac{1}{x}$  на плоскости возьмём замыкание и обозначим через  $L$  его одноточечную компактификацию. Вычислите  $\pi_1(L)$  с отмеченной точкой  $(\frac{1}{\pi}, 0)$ .

**Задача 3.** Введём на  $\mathbb{R}^2$  отношение эквивалентности, порождённое соотношениями  $(x, y) \sim (x + 1, y) \sim (-x, y + 1)$ . Опишите факторпространство, введя на нём структуру  $CW$ -комплекса.

**Задача 4.** Перечислите все с точностью до изоморфизма накрытия<sup>2</sup> над букетом тора и двумерной сферы.

**Задача 5.** В стену вбиты  $k$  гвоздей. Есть картина, к верхним углам которой приделана длинная нитка. Как повесить картину на гвозди, чтобы она падала при удалении любого гвоздя? Рассмотрите случаи **а)**  $k = 2$ ; **б)** произвольного  $k$ .

**Задача 6.** Приведите пример накрытий  $X \rightarrow Y$  и  $Y \rightarrow Z$ , композиция которых не является накрытием.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Открытыми в ней считаются множества вида  $(a; +\infty)$ .

<sup>2</sup>Напомним, накрытия  $p : E \rightarrow B$  и  $p' : E' \rightarrow B$  называются *изоморфными*, если  $p = p' \circ f$  для некоторого гомеоморфизма  $f : E \rightarrow E'$ . Обратите внимание, что если тотальные пространства накрытий гомеоморфны, то сами накрытия могут не быть изоморфными.

<sup>3</sup>Указание: для этого потребуются локально неодносвязные пространства.