

Топология – 1  
Экзамен (вторая попытка)  
24 сентября 2023

На экзамене разрешается использовать любые бумажные материалы, но нельзя пользоваться интернетом и общаться.

**Задача 1.** Гомеоморфны ли (приведённая<sup>1</sup>) надстройка  $\Sigma\mathbb{Q}$  и букет счётного числа окружностей?

**Задача 2.** Докажите, что при  $n > 1$  любое отображение  $S^n \rightarrow S^1$  гомотопно отображению в точку.

**Задача 3.** На двух торах отметили параллель и меридиан, а затем соответственно склеили параллель и меридиан первого тора с параллелью и меридианом второго тора.

а) Букету каких поверхностей гомотопически эквивалентно получившееся пространство?

б) Вычислите его фундаментальную группу.

**Задача 4.** Постройте какой-нибудь  $CW$ -комплекс, фундаментальная группа которого изоморфна  $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$ . Сколько клеток каждой размерности он содержит?

**Задача 5.** Верно ли, что пара  $[0; 1], (0; 1)$  удовлетворяет условию поднятия гомотопии для любого накрытия?

**Задача 6.** Докажите, что для любого отображения  $CW$ -комплексов  $f : X \rightarrow Y$  существует отображение  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow E$ , делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Здесь  $\tilde{X}$  — универсальное накрытие над  $X$ , а  $E$  — любое накрытие над  $Y$ .

---

<sup>1</sup>Напомним,  $\Sigma X$  определяется как фактор  $X \times [0; 1]$  по отношению эквивалентности, порождённому соотношениями  $x \times 0 \sim y \times 0$ ,  $x \times 1 \sim y \times 1$  и  $x_0 \times s \sim x_0 \times t$  для всех  $x, y \in X$  и  $s, t \in [0; 1]$ . Здесь  $x_0 \in X$  — заранее зафиксированная отмеченная точка.