

Топология – 1
Задачи к лекции 1:
Общая топология
7 февраля 2023

Задача 1. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — отображение метрических пространств.

Говорят, что f непрерывно по Коши в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что $f(B_{\delta,x}) \subset B_{\varepsilon,f(x)}$.

Говорят, что f непрерывно по Гейне в точке $x \in X$, если для любой последовательности $x_1, x_2, \dots \in X$, такой что $\lim x_n = x$, верно что $\lim f(x_n) = f(x)$.

Докажите эквивалентность этих двух определений.

Задача 2. Проверьте аксиомы топологии для системы открытых множеств произвольного метрического пространства.

Задача 3. Докажите, что определённые на \mathbb{R}^n метрики $d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$, $d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ и $d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$ задают одинаковую топологию.

Задача 4. Пусть в топологическом пространстве X для любой пары точек у одной из них существует окрестность, не содержащая другую. Верно ли, что X хаусдорфово?

Задача 5. Покажите, что в хаусдорфовом топологическом пространстве любая точка является замкнутым множеством.

Задача 6. Напомним, *топологией Зарисского* на аффинном пространстве называется топология, в которой замкнутые множества — решения (возможно, бесконечных) систем полиномиальных уравнений.

а) Покажите, что пространства \mathbb{R}^n с топологией Зарисского не является хаусдорфовым.

б) Опишите топологию Зарисского на \mathbb{R} . Имеет ли она счётную базу?

Задача 7. Покажите, что топология произведения $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ совпадает со стандартной топологией на \mathbb{R}^n .

Задача 8. Покажите, что **а)** отображение $GL(n) \times GL(n) \rightarrow GL(n)$, задающее умножение матриц; **б)** отображение $GL(n) \rightarrow GL(n)$, задающее обратную матрицу, является непрерывным.