Топология – 1
Задачи к лекции 2: Факторпространства
14 февраля 2023

Задача 1. Напомним, n-мерным проективным пространством $\mathbb{KP}^n$ над полем $\mathbb{K}$ называется фактор $\mathbb{K}^{n+1} \setminus (0, \ldots, 0)$ по отношению пропорциональности (т. е. умножению на элементы $\mathbb{K} \setminus 0$).

a) Докажите, что $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$.

b) Докажите, что $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$.

Задача 2. a) Докажите,[1] что фактор $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ гомеоморфен S^1.

b) В торе $S^1 \times S^1$ отождествим все точки одной параллели $S^1 \times y_0$ и одного меридиана $x_0 \times S^1$ (т. е. "склеим" объединение параллели и меридиана в одну точку). Докажите, что полученное факторпространство гомеоморфно S^2.

Задача 3. a) Лентой Мёбиуса M называется результат склейки двух противоположных сторон квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$ с перекруткой: $(0, t) \sim (1, 1 - t)$. Покажите, что две другие стороны квадрата после этой склейки образуют подмножество, гомеоморфное окружности (назовём его "границей" ленты Мёбиуса ∂M) и что если склеить ∂M в одну точку, то результат будет гомеоморфен $\mathbb{RP}^2$.

б) Бутылкой Клейна K называется результат склейки оснований цилиндра $S^1 \times [0; 1]$ с перекруткой: $(s, 0) \sim (\pi - s, 1)$. Покажите, что результат склейки двух копий M по гомеоморфизму[2] их границ гомеоморфен K.

Задача 4. Возьмём два полнотория $D^2 \times S^1$. Задайте между их границами такой гомеоморфизм ψ, что результат склейки полноторий по ψ гомеоморфен S^3.

Задача 5. Склеим счётное число отрезков $I_1, I_2, \ldots$, отождествив их левые концы; назовём эту точку a. Выберем по одной точке $x_k \in I_k$. Докажите, что предел последовательности x_k равен a если и только если все x_k, кроме, может быть, конечного числа, равны a.

Задача 6. а) Покажите, что любое метрическое пространство нормально — т. е. для любой пары точек первая имеет окрестность, не содержащую вторую, а также любые два непересекающихся замкнутых множества в нём имеют непересекающиеся окрестности.

б) (*Лемма Урысона*) Пусть $A_0, A_1 \subset X$ — непересекающиеся замкнутые подмножества нормального пространства. Предположим, мы построили два набора открытых множеств $U_i \supset A_0$ и $V_i \supset A_1$, где i пробегает все двоично-рациональные числа на интервале $(0; 1)$, причём если $i < j$, то $U_i \subset U_j$, $V_i \supset V_j$ и $V_i \cup U_j = X$. Кроме того, пусть $U_i \cap V_i = \varnothing$, положим $A_i = X \setminus (U_i \cup V_i)$. Заметим, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Зададим функцию φ на всех A_i равной i. Покажите, что она продолжается на X по непрерывности[3].

В итоге мы получили, что *в нормальном пространстве любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы.*

[1] Можете дополнительно проверить, переводит ли построенный вами гомеоморфизм операцию сложения на $\mathbb{R}$ в операцию комплексного умножения на S^1.

[2] Здесь разрешается взять гомеоморфизм на ваш выбор — но вы можете попробовать убедиться, что утверждение задачи не зависит от выбора гомеоморфизма.

[3] причём единственным образом